Claves de la Matemática

Isabel Rosa Rinaldi



UNER



Rector
Andrés Sabella

Secretario de Extensión
Universitaria y Cultura
Roberto Medici

Director EDUNER
Gustavo Esteban Martínez



EDUNER

Claves de la Matemática

Isabel Rosa Rinaldi

cátedra | grado

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS

510.711	Rinaldi, Isabel Rosa
CDD	Claves de la matemática / Isabel Rosa Rinaldi. - 1a ed. - Paraná : Universidad Nacional de Entre Ríos. UNER, 2020. Libro digital, PDF - (Cátedra ; 1)
	Archivo Digital: descarga y online
	ISBN 978-950-698-467-0
	1. Educación Superior. 2. Matemática. I. Título

Primera edición, 300 ejemplares, 2011.

Coordinación de la edición: Gustavo Esteban Martínez
Corrección: Ana Lía Pujato
Diseño gráfico: Gabriela Resett
Foto de tapa: *Sin título*. Gabriela Resett, 2010

EDUNER
Andrés Pazos 406 (E3100FHJ), Paraná, Entre Ríos, Argentina
eduner@uner.edu.ar
www.eduner.uner.edu.ar
Editado e impreso en Argentina

Índice

Prólogo

La alegría de enseñar estimula el deseo de aprender, y el placer de aprender alimenta la voluntad de enseñar.

Porque "aprender" y "enseñar" son actividades indisociables que conviven como organismos en simbiosis; crecen, se alimentan y se nutren mutuamente.

Ningún profesor permanece como tal si no mantiene una constante disposición para aprender y, al mismo tiempo, el más novel alumno siempre tiene algo –a veces muy sutil– para enseñar.

Es de suponer que las expresiones anteriores cuentan con el acuerdo de la mayoría de los vinculados con el quehacer docente; sin embargo es poco frecuente encontrar acciones o prácticas que materialicen dicha concepción educativa.

En ese sentido, la presente obra es un ejemplo empírico del aprendizaje que la autora obtuvo de sus alumnos a lo largo de una vasta actividad universitaria y su esfuerzo intelectual para concretarla está signado por el objetivo de ayudar, a quienes le enseñaron, en el desafío de aprender matemática.

Se trata de una obra que intenta acompañar a los estudiantes que desean transitar una carrera universitaria y tienen dificultades para estudiar y aprender matemática. Por eso, los destinatarios primeros y a quienes el libro se dirige son los estudiantes de cualquier carrera de grado o pregrado en la que matemática es una asignatura del plan de estudio.

Los destinatarios implícitos son docentes y profesores con sensibilidad para fortalecer el diálogo con los alumnos y que deseen contar con argumentos teóricos para comprender el vínculo docente-matemática-estudiantes. Aquí se desmenuza esa terna, se identifican los puntos en que se suelen presentar rupturas y se señalan caminos superadores.

Este libro, que surge como expresión de la observación humana de la autora sobre el quehacer docente, plantea un recorrido sobre aquellos aspectos que se ponen en juego al momento de aprender matemática.

Así, en el Capítulo 1 se aborda la cuestión de la actitud para estudiar y aprender. A partir de fundamentos de psicología cognitiva se analizan las componentes emocionales y conductuales que conforman una adecuada predisposición para aprender y también aquellas que se convierten en obstáculos invisibles para captar, entender y perseverar en el estudio de la matemática.

El Capítulo 2 presenta elementos de neurociencia para describir nuestro cerebro e identificar las funciones de los hemisferios cerebrales que se ponen en juego al momento de "hacer matemática". Este conocimiento permite comprender la importancia y el rol que desempeñan la atención, la memoria y las emociones en el proceso de aprendizaje de la matemática.

En el Capítulo 3 se interroga acerca de qué es ser inteligente y en el recorrido de la respuesta se rompe el mito de la inteligencia como herencia para favorecer en el lector la predisposición a desarrollarla a través de acertados ejercicios sugeridos en los que se distinguen aspectos de intuición, imaginación y creatividad.

Los Capítulos 4 y 5 abordan la problemática del lenguaje de la matemática. En el primero se realiza un planteo general del rol que desempeña el lenguaje de esta disciplina para la comprensión, interpretación y en definitiva la construcción del conocimiento matemático a través de las diferentes representaciones semióticas. Así, el Capítulo 5 se centra en una de ellas: la representación gráfica y analiza la coherencia interna entre el lenguaje algebraico y el gráfico. Es un capítulo que sintetiza saberes adquiridos en contextos analíticos, algebraicos y geométricos para transferirlos a un contexto gráfico.

Esta obra, rica en metáforas, escrita con un lenguaje llano a modo de diálogo con el estudiante, contiene un último capítulo en el que se responde a los interrogantes de qué, cómo, cuándo y dónde estudiar para realmente aprender matemática.

Es un texto por momentos desafiante, por momentos comprensivo, que intenta construir en el lector la autonomía en el estudio de la matemática y para ello analiza los posibles "fracasos" como oportunidades de crecimiento personal para alentar, de algún modo, el placer de aprender y con él la alegría de enseñar.

No quisiera terminar este prólogo sin manifestar la satisfacción que me produce el ofrecimiento de la autora para escribirlo y mi gratitud por ello.

Además, deseo felicitar a la Universidad Nacional de Entre Ríos por el esfuerzo para editar esta obra, que es el excelente resultado de una trayecto-

ria docente puesta en manos de la sociedad. La mejor forma de descubrir su valía es adentrarse en sus páginas y utilizar la información y conocimientos que aporta para contribuir a facilitar la inserción y permanencia de los jóvenes en la vida universitaria, objetivo último de los esfuerzos, ilusiones y saber hacer aquí invertidos.

Santa Fe, 15 de abril de 2011

Susana Marcipar Katz
Universidad Nacional del Litoral

Introducción

Este libro está dedicado a todos los estudiantes que alguna vez se hayan preguntado "¿por qué me cuesta tanto aprender matemática?" Si sos uno de ellos, es probable que su lectura te permita bucear en tu historia de estudiante para descubrir y analizar los obstáculos que trabaron el avance hacia el conocimiento matemático.

¿Cuándo se cuestiona alguien su propio aprendizaje? Obviamente, cuando se encuentra frente a supuestos fracasos en las evaluaciones de la asignatura. En ese momento surge la pregunta formulada al comienzo, pero también otras. "¿Realmente no entiendo la matemática o no puedo explicar lo que aprendí? ¿Por qué salgo mal si estudié tanto?"

¡Cuántas cosas hay para decir al respecto! Como son tantas… tuve que elegir las que mi larga experiencia como docente de Cálculo me llevó a percibir como luces de alerta. Sobre ellas "conversaremos".

Éste no es un texto de matemática –los hay numerosos y excelentes–; tampoco de psicopedagogía y mucho menos de neuropsicología cognitiva. Pero contiene elementos básicos de esas áreas: los necesarios para que comprendas por qué a veces no comprendes y trates de ajustar aquellos aspectos que podrían estar incidiendo negativamente en tu aprendizaje.

Las teorías a las que hago referencia no son las únicas en relación con los temas tratados pero han sido elegidas con cuidado y en concordancia con lo que pienso y siento cuando estoy en un aula palpitante de alumnos que desean aprender.

Opté por un lenguaje sencillo, equiparable al que emplearíamos si estuviéramos conversando. Pero como no estás presente, me permití imaginar las respuestas que darías a algunos interrogantes. Y así creé un diálogo entre los dos.

El libro consta de seis capítulos que pretenden ponerte en contacto con tu manera de encarar el estudio, la necesidad de armonizar los hemisferios

cerebrales para la consecución de conocimientos integrados, la comprensión del lenguaje matemático –incluyendo la etimología de los términos más empleados– y, sobre todo, con tu actitud frente al aprendizaje de esta hermosa ciencia.

Junto a tu esfuerzo está tu docente. Recordalo y ¡adelante!

Capítulo 1

Actitud

Comienza el cuatrimestre.
Me presento: soy I. R. Dejo el portafolios sobre el escritorio y hago una breve reseña de mi historia en la Facultad (para entrar en clima).

Cerca de noventa rostros a la espera. Los observo unos segundos y pregunto: ¿alguien cursó ya esta asignatura?

Varios levantan la mano.

—Yo, yo, yo… (se escucha). ¡Cuántos! No hago ningún comentario pero pienso: ¿Todos necesitarán el recursado? ¿Qué los impulsa a repetirlo? ¿No les resultará aburrido?

Obviamente sé que las clases no han de ser iguales a las del cuatrimestre anterior, que cada una será recreada con el nuevo grupo de estudiantes. Pero soy consciente de que no han de variar los temas a desarrollar (ya que integran el programa de la asignatura) ni la naturaleza de los ejercicios que se propongan.

Distingo caras curiosas, expectantes, y otras impasibles. Están los nuevos, los que inauguran su condición de alumnos de la materia, y los otros, que esperan con paciencia que se derrame la catarata de palabras, signos, conceptos entrelazados, propiedades… en fin, todo ese cúmulo de objetos para ellos esquivos, oscuros, ajenos. Ese flujo de conocimientos no aprendidos durante el cursado anterior que pareciera haberlos conducido de nuevo al punto de partida porque, sin duda, en el aula "Unos elaboran poco a poco una experiencia que dominan, mientras que otros no lo logran, se sienten desposeídos, indiferentes, a veces destruidos en su recorrido" (Dubet y Martuccelli, 1998:20).

1.1 ¿Qué es actitud?

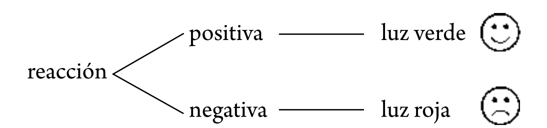
Cuando llegás al aula, cargás una "mochila" con los conocimientos de las matemáticas de años anteriores y una determinada actitud ante el aprendizaje en general y el de la matemática en particular.

En tu "oficio" de alumno aprendiste a aceptar códigos, a comprender las reglas del juego académico, a construir tu propia historia. Ésta evidenciará las huellas en tu subjetividad de pretéritas y diversas experiencias de aprendizaje. Estas "marcas" revelan características que no son en sí mismas buenas ni malas pero que están allí, a veces visibles y otras ocultas; tal vez exhibidas orgullosamente o acaso veladas, profundas. Ellas deciden tu actitud.

Los analistas educativos comenzaron –no hace mucho– a tomar conciencia de que para abordar el problema del aprendizaje de la matemática no bastaba con ocuparse del aspecto teórico o de la consolidación de habilidades: hacía falta además considerar el posicionamiento del estudiante ante dicho proceso, su forma de "estar" ahí. Y comenzaron a escribir acerca de las actitudes.

Podríamos definir la actitud (Morales *et al* 1994) como una reacción afectiva (que puede ser positiva o negativa) hacia algo (un objeto, una situación, una persona, un escrito) que nos impulsa a actuar de determinada manera. Tal reacción, cuando es positiva, nos dispone favorablemente hacia aquello con lo que nos enfrentamos, allana el camino hacia la meta, aligera el pensamiento y facilita el progreso; por el contrario, cuando es negativa, obnubila el razonamiento y dificulta la marcha hacia el objetivo; nos "traba".

Sintética y "semafóricamente":



Toda actitud está compuesta por tres elementos:

- lo que se piensa: componente cognitiva;
- lo que se siente: componente emocional;
- lo que se hace en consecuencia de lo que se piensa y se siente: componente conductual.

Llevemos esto al terreno que nos ocupa, el de la matemática. Supongamos que tu actitud ante su aprendizaje es negativa, por lo tanto:

- pensás que es difícil o que no tenés condiciones para aprenderla;
- sentís rechazo por la asignatura o por el docente al frente de la clase, es decir, no tenés disposición afectiva hacia el aprendizaje de la materia;
- manifestás abiertamente lo que pensás y sentís, o lo callás y te "cerrás".

Analicemos cada componente de la actitud en este hipotético caso.

¿Qué pensás de la matemática?

es ☐ a. muy difícil ☐ b. aburrida ☐ c. poco útil

a. Si contestaste "muy difícil", ésa es tu creencia.

Pero: ¿Es muy difícil para vos o para todos?

☐ PARA VOS

Entra en juego tu autoestima. Te estás rotulando: te creés incapaz en ese terreno.

☐ PARA TODOS

Estás poniéndole el rótulo a la asignatura: es inaccesible.

¿Notás la diferencia?

Si asumís que el problema es tuyo, conviene analizar el concepto que tenés de vos mismo; lo haremos más adelante. si estás convencido de que el problema es de la asignatura, es oportuno recordar que algunos alumnos la aprenden sin mayor dificultad, de manera que estás admitiendo que otros pueden lo que vos no y volvemos al tema de la autoestima.

Sinteticemos: "Creés que la matemática es difícil". Pues bien, este juicio, en parte, te impide lograr el éxito en su aprendizaje, entendiendo por "éxito" la adquisición de los conocimientos que te han de conducir a la aprobación.

Esa creencia está afectando tu faz cognitiva (te cuesta aprender); te inspira sentimientos negativos (la rechazás) y te dispone en su contra (altera tu conducta).

¿Cuándo comenzaste a pensar que la matemática era difícil?

☐ …de chico? (escuela primaria) ☐ …cuando adolescente? (escuela secundaria) ☐ …al ingresar a la facultad?

Seleccioná el casillero que corresponda a tus recuerdos. Encontrarás el punto de partida de las dificultades.

¿Por qué pensaste que no podías aprenderla?

¿Será porque…

- no te interesaron los contenidos presentados?

- con frecuencia obtuviste notas bajas en las evaluaciones?

- siempre te sentiste inseguro al resolver las situaciones problemáticas?

- no te resultaron simpáticos los profesores de la asignatura o su manera de encarar las clases?

Estamos rastreando tu historia juntos. ¿Con qué objeto? Para descubrir la raíz de tu creencia, ya que sólo sabiendo cuándo y dónde nace podrás actuar para tratar de modificarla.

Creencia es una idea, una opinión, relacionada en este caso con el conocimiento matemático. Es la convicción que uno posee, basándose en experiencias anteriores, de que actuando de determinada manera obtendrá tal o cual resultado.

Además, es bueno saber que una creencia (en este caso, que la matemática es difícil y/o que carecés de capacidad para aprenderla) pudo ser consolidada de distintas maneras a lo largo de tu paso por las aulas y puede ser revertida si te lo proponés.

Si los contenidos de la disciplina no lograron captar tu interés, posiblemente no vislumbraste –o no te informaron acerca de– su incidencia en la consolidación de conocimientos vinculados con tu realidad. En esto tiene mucho que ver la preocupación del docente por iluminar de manera adecuada el objetivo final del aprendizaje de la matemática y los caminos que conducen al mismo.

Si obtuviste notas bajas cabe que te preguntés si estudiaste lo suficiente para hacer frente a la evaluación o si supiste preparar los temas.

Si las situaciones problemáticas no te resultaron claras habría que analizar tu comprensión de los enunciados, del lenguaje.

Si no te "gustaron" los profesores debés analizar si tu parte afectiva lo decidió con base en el tratamiento que recibiste de ellos o si los recursos didácticos empleados no lograron motivarte.

b. Partamos ahora de la segunda posibilidad: "es aburrida".

El aburrimiento es tedio, fastidio, cansancio originado por algo que no nos entretiene, distrae o divierte. El aprendizaje no es una diversión –aun tomándolo con alegría y entusiasmo, como corresponde–; implica esfuerzo (que es el empleo de tu vigor para conseguir algo venciendo las dificultades), dedicación y voluntad (el acto por el cual elegís hacer algo sin que te lo impongan).

Te corresponde hacer del aprendizaje de la matemática una tarea grata, entretenida; tu profesor debe ayudarte a que lo logrés. De no ser así, expulsarás la asignatura del campo de tus intereses y será difícil que puedas aprenderla.

c. ¿Marcaste "poco útil"? Creo que no te pusiste a pensar con detención en la matemática. Digamos que la utilizaste cada vez que la necesitabas, sin ofrecerle el lugar que merece. ¡Cómo será de importante la matemática, que penetra toda tu realidad: pasada, presente y futura!

Te ha permitido realizar los innumerables cálculos numéricos que precisás a diario, resolver ecuaciones y problemas de diversa índole, establecer relaciones geométricas y trigonométricas, calcular probabilidades, interpretar los esquemas, gráficos estadísticos y tablas que ilustran las informaciones periodísticas o científicas…

La matemática es un modo de pensar, de razonar. "No existe una disciplina mejor para aprender lo que significa comprender" (Schoenfeld, 1991:15). Organiza tus deducciones, te impulsa a abstraer y a generalizar; disciplina tu mente y la ordena; orienta tu futuro proceso de transformación de la realidad y te ayuda a construir una subjetividad plena y feliz, lo que constituye un beneficio no sólo personal sino social.

Y no está exenta de belleza y armonía, ambas expuestas en las formas planas y tridimensionales, en las trayectorias de los cuerpos en movimiento, en el ritmo musical. Recordá que la belleza es fuente inagotable de felicidad.

¿Para quiénes es útil? Obviamente para todos: pensá en los ingenieros, en los economistas, en los comerciantes, en los financistas, en los agrimensores, en los arquitectos… (Podés agregar profesionales; la lista es enorme).

Día a día surgen nuevas ramas de la matemática que permiten a los científicos fundar sus teorías, inventar objetos nuevos, interpretar fenómenos, crear proyectos.

No debés perder de vista, además, que te proporciona un lenguaje universal, entendido por todos los que utilizan la matemática en su quehacer y sin el cual la mayor parte de la ciencia y tecnología actuales te serían ajenas. ¿No te parece que quedarías fuera del mundo?

1.2 Componente cognitiva de la actitud

En esta componente interviene lo que pensás de:

- la matemática y la forma de aprenderla;
- vos mismo;
- la enseñanza impartida;
- el contexto.

1.2.1 Cómo concebís la matemática y cómo creés que se aprende

Ya analizamos algunas de tus creencias respecto de la matemática. Tus juicios y valoraciones tienen que ver con ellas, pero además están las creencias acerca de la manera de aprenderla.

Tratá de responder con sinceridad el siguiente cuestionario:

1. *¿Suponés que para "saber" matemática sólo es necesario memorizar conceptos, fórmulas y reglas?*

❑ sí ❑ no

¿Contestaste sí? Bueno, no es cierto. La palabra "sólo" en la pregunta formulada es la que hace que la respuesta sea no. Pero si no pusiéramos en juego la memoria, la resolución de un problema –por ejemplo– exigiría la consulta de varios libros y tablas en forma simultánea, lo cual, aun siendo correcto, resultaría muy incómodo.

Por suerte, cuando participás en la elaboración de un concepto, lo recordás; si una fórmula sencilla fue deducida antes, al comprenderla y después de haberla utilizado varias veces, la memorizás. Las propiedades y reglas de operación aprendidas se incorporan en forma natural a nuestro cerebro de manera que no es necesario detenerse a pensarlas: surgen en forma espontánea.

La memoria nos ayuda pero la naturaleza del conocimiento matemático exige, además, otras funciones mentales que permitan relacionar lo nuevo con lo "guardado". Si no disponemos de capacidades cognitivas ni de habilidades desarrolladas y pretendemos depositar en la memoria la responsabilidad del éxito, es probable que ésta nos falle ¡justamente en las evaluaciones!

2. *¿Creés que todos los problemas matemáticos son iguales pero con distintos datos y que sólo exigen la aplicación de fórmulas y procedimientos ya vistos?*

❑ sí ❑ no

Si contestaste sí, estás equivocado. No existen "patrones" para resolver problemas; no se trata de disponer de un "molde" en el que se encajan los distintos datos para que surja la solución. Cada situación problemática debe ser considerada como única y pensada como tal aunque recurrás a razonamientos previamente utilizados y apliqués propiedades y fórmulas conocidas de antemano. Sólo si trabajás buscando la solución de ese problema en particular, estarás convencido de la pertinencia de los resultados obtenidos y te sentirás seguro.

3. *¿Pensás que lo único que merece ser estudiado es aquello sobre lo cual vas a ser evaluado?*

☐ sí ☐ no

¿Sí? ¿Cómo podés saber exactamente lo que te van a preguntar? El temario lo conocés, sin duda, pero todos los conocimientos se entrelazan, confluyen hacia cada uno de los contenidos objeto de la evaluación y no basta con conocer algunos temas: es casi seguro que lo que dejaste de lado, de alguna manera, estaba implicado en el temario de examen.

Si contestaste no a las tres preguntas anteriores, en el camino hacia el conocimiento matemático tenés luces encendidas: una de ellas te hace "ver" que además de la memoria hacen falta otras capacidades; otra, que para resolver situaciones problemáticas deberás anexar a tus conocimientos básicos el ingenio, la estrategia y la creatividad; la tercera, que ¡tenés que estudiar el programa *completo*!

1.2.2 Cómo te concebís a vos mismo

En el aprendizaje, tu opinión sobre vos es fundamental. Eso, y la forma en que te concebís dentro del mundo, deciden tus actitudes. Lo que pensás sobre tus posibilidades tiene una fuerte componente afectiva: incluye la confianza en tus logros, la culpa que asumas ante los fracasos (que nunca son tales), la resistencia que opongas a las circunstanciales frustraciones y la posibilidad de comunicación con quienes te rodean.

El autoconcepto te induce a valorar de forma positiva o negativa tus capacidades. Si creés que no sos capaz de aprender matemática seguramente exagerarás las dificultades que se te presentan, tendrás bajas expectativas de éxito y es probable que abandonés el cursado de la asignatura ante el primer obstáculo. Un autoconcepto negativo juega en tu contra, te nubla el entendimiento, refuerza la actitud de rechazo y hace que te invadan el pesimismo y el desánimo. Por el contrario, si te considerás capaz, creativo, seguro y con alta autoestima, todo resultará más fácil.

Yolanda Campos Campos, en "Importancia de las actitudes en la educación matemática" (1995, ponencia, en Asociación Nacional de Profesores de Matemática en México), afirma: "Una gran parte de la problemática escolar (universitaria) no radica en la capacidad o incapacidad de los alumnos para comprender determinados temas sino en la actitud hacia la escuela (universidad), el profesor y la asignatura" (el paréntesis es nuestro).

Cuando llegás a la universidad portás tus aptitudes –conscientes o en estado latente–; desarrollaste habilidades y capacidades en tu paso por la escuela secundaria; sos dueño de un conjunto de conocimientos incorporados de manera sistemática o espontánea –bien estructurados o inconexos–; acarreás experiencias educativas previas –favorables o desfavorables–; poseés debilidades y fortalezas, intereses y metas. El descubrimiento de todo este bagaje será el punto de partida del camino hacia el conocimiento matemático.

1.2.3 La enseñanza impartida

No es posible analizar los problemas de aprendizaje de una asignatura sin hacer referencia a la enseñanza impartida.

Tus actitudes –tanto positivas como negativas– han sido producto de experiencias escolares y familiares, de los incentivos o los reproches que recibiste frente a los resultados obtenidos y de tus propias expectativas.

Todos somos permeables a la influencia del medio: patrones sociales (que deciden qué es lo importante en determinado momento y lugar), prejuicios (que rotulan de inteligentes sólo a los que poseen determinadas aptitudes), lo que nos transmiten los medios de comunicación con relación al "éxito". Tu gusto por la matemática, la utilidad que le conferís, tu persistencia en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados dependen, en gran medida, de la forma en que te fue presentada la asignatura, del valor que le adjudiqués al conocimiento y a la formación de tu pensamiento. Y en todo esto cuenta, en gran medida, el posicionamiento del docente.

Convengamos que expectativas, necesidades, intereses e incluso tu conducta, pueden ser afectados por la actitud del docente quien, a su vez, consolidó la propia en su lugar de formación.

Es probable que la manera en que te enseñaron matemática haya influido más que los contenidos de la asignatura.

Un docente puede creer que su misión es transmitir conocimientos ya elaborados (conceptos y relaciones entre ellos); en ese caso se limitará a suministrar información, reproducir en forma rigurosa los teoremas y enunciar con elegancia las propiedades. Tu papel, en ese caso, es el de receptor de esa información y la actividad fundamental almacenar datos. En ese caso el acento del proceso está puesto en el "qué" y la meta, en la culminación del programa.

La otra posibilidad es que el docente se haya formado sobre la base de valores orientadores hacia el "cómo", en cuyo caso apuntará al desarrollo

del pensamiento lógico, de la imaginación y la creatividad, con el estudiante como actor en el proceso de construcción del conocimiento.



TOMATE UNOS MINUTOS Y LEÉ LOS SIGUIENTES INTERROGANTES. LUEGO PENSÁ EN TRES PROFESORES DE MATEMÁTICA QUE HAYAS TENIDO EN LA ESCUELA SECUNDARIA (IDENTIFICALOS CON A, B Y C) Y EVOCÁNDOLOS, CONTESTÁ SÍ O NO.

	PROFESORES		
INTERROGANTES	A	B	C
a. ¿Insistió en que la matemática no consiste en la mera memorización de definiciones, propiedades y teoremas?			
b. ¿Relacionó la matemática institucionalizada (la del programa) con la matemática de la vida cotidiana?			
c. ¿Valorizó más la comprensión de los problemas que la exactitud de los cálculos?			
d. ¿Elaboró evaluaciones originales que no condujeran respuestas memorizadas?			
e. ¿Admitió alguna vez que no sabía algo o que se había equivocado?			
f. ¿Mostró agrado por la asignatura y por el proceso de enseñanza de la misma?			
g. ¿Presentó dinamismo y creatividad en las clases?			
h. ¿Demostró ser paciente y comprensivo con vos?			

¿Para qué sirvió este ejercicio? Para que visualicés otra vertiente de tu actitud y la circunstancia que contribuyó a su cristalización.

Si la mayoría de tus respuestas fue sí, sos afortunado.

Tus profesores tuvieron claro que:

- saber matemática no es repetir lo que dicen los textos (por perfecta que sea la exposición) ni memorizar propiedades y teoremas que luego no puedan aplicarse de manera consciente a situaciones distintas de las ya presentadas;

- la matemática formalizada e institucionalizada (la que figura en los programas) no puede escindirse de la que se emplea a diario, en los problemas de la vida real;

- la comprensión es más importante que la ejecución de los cálculos porque cuando las cosas se entienden es fácil detectar y corregir los errores cometidos;

- al evaluar teniendo en cuenta la comprensión, las pruebas dejan de ser "estándar", repetidas, rutinarias y se convierten en herramientas creativas, originales;

- nadie es "dueño" del saber completo, acabado, y admitir que uno no sabe algo o bien que se ha equivocado no constituye una muestra de flaqueza sino de honestidad intelectual;

- el entusiasmo que el docente muestra por su tarea "arrastra" a los estudiantes, los contagia y los ubica de manera grata en el ambiente de estudio;

- las clases dinámicas y amenas son mucho más provechosas para los estudiantes que las frías e impecables exposiciones en el pizarrón;

- los alumnos necesitan de paciencia y comprensión para crecer en la búsqueda del conocimiento.

Si contestaste no a varios de los interrogantes es probable que en eso radique tu actitud negativa frente a la matemática. Pero no estamos a la caza de brujas. No se trata de buscar responsables o culpables de lo que nos pasa sino de comprender, de llegar al fondo de la cuestión, para emerger con la mente abierta, despejada y comenzar a cambiar actitudes. Docentes y alumnos son, de alguna manera, "socios", tanto en el éxito como en el fracaso. Las investigaciones de Phillips y Agne Greenwood y Miller aseguran que existe una estrecha relación entre actitudes de los alumnos y creencias del docente y rendimiento académico de los primeros (Bazán y Aparicio, 2006).

No podés influir sobre lo pasado pero sí sobre tu futuro. Podrás decir: "detestaba la matemática, la rechazaba, hasta que comprendí que mi negación provenía de creencias acerca de su naturaleza (para mí, desconocida), de que me consideraba poco apto para aprenderla (mi nivel de autoestima) y de las experiencias didácticas anteriores no favorables (ajenas a mí)".

1.2.4 El contexto

Tu grupo familiar

Con frecuencia la matemática pasa a ser la materia "peligrosa": puede definir la promoción al próximo curso; exige más dedicación de la que estás dispuesto a darle; te hace aparecer como "inteligente" cuando la aprobás sin problemas pero te condena como "burro" cuando fracasás. ¡Ni qué hablar si tenés un hermano o hermana que "anda" bien en matemática! El hogar es el sitio donde se forja la responsabilidad y se cultiva la curiosidad por el mundo que nos rodea.

El aula

Ser "bueno" en la asignatura "acomoda" en un rol privilegiado ante los compañeros de curso, rodea de un cierto halo de superioridad, da prestigio. Por el contrario, intentos fallidos de aprobación en matemática adjudican a nivel social el grado de no apto. Nadie recurre a vos para que le expliqués algo, y tal vez no seas de los que piden ayuda para salir del paso.

Esa valoración positiva de quien "sabe matemáticas" es de naturaleza social. Se asocia buen rendimiento en la asignatura con inteligencia, sin tener en cuenta que existen otras variables en juego: participación en las clases, compromiso personal con el aprendizaje, esfuerzo, dedicación y por supuesto ¡ horas de estudio!

La institución

Una cuestión no menor es la diversidad de valoraciones y legitimidades que se le confieren a la matemática en las instituciones de nivel superior. La identidad sociocultural influye en gran medida en lo que piensa el alumno acerca de la importancia y utilidad de la disciplina y en lo que transmite el docente al enseñarla.

Si no se tiene en cuenta el papel que la matemática desempeña en la formación del pensamiento y se la despoja de su esencia reduciéndola a la condición de mera "herramienta" es poco probable que pueda elaborarse una fundamentación conceptual de relevante proyección hacia el conocimiento.

1.3 Componente emocional de la actitud

Hemos analizado –sin pretender ser exhaustivos porque excedería mi propósito y correría el riesgo de que te aburras– la componente cognitiva de tu actitud hacia el aprendizaje de la asignatura, entendiendo que involucra hechos, opiniones, creencias, conocimientos y expectativas acerca del objeto en cuestión: la matemática.

Encaremos ahora otra componente: la afectiva o emocional.

Se define el afecto o dominio afectivo como el "extenso conjunto de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son considerados generalmente como algo distinto de la cognición" (Mc Leod, 1989, citado en Bazán y Aparicio, 2006: 5).

La afectividad refuerza o contradice las creencias y se expresa a través de los sentimientos y las emociones.

No resulta fácil definir lo que se entiende por afectividad en el terreno educativo y en especial en el aprendizaje de la matemática pero para tratar de interpretarla se ha recurrido a las emociones. ¿Por qué? Porque los investigadores en psicología de la emoción, independientemente de las teorías en

que se inscriban, coinciden en que existe estrecha conexión entre las emociones de una persona, su sistema de valores y las metas que se haya fijado. Por eso ya no se discute la importancia de las emociones en el proceso de aprendizaje, sobre todo teniendo en cuenta que los estudiantes, de manera espontánea, indican qué temas les resultan agradables y cuáles les generan rechazo, disgusto o desaliento.

Vida cognitiva y vida afectiva son inseparables ya que no se puede razonar sin experimentar algún sentimiento al hacerlo ni querer aquello que no se comprende. Piaget afirmaba que el desarrollo intelectual de una persona es la suma de su aspecto cognitivo con el afectivo.

Podríamos sintetizar así la relación cognición - afectividad:

Como	Entonces	Por lo tanto
No me gusta	Lo rechazo	No lo aprendo
No lo entiendo	No puedo decir que me guste	Lo descarto

Por lo común ocurre lo segundo, es decir, se parte de la negación de la comprensión. Porque no lo entendés no "sentís" afecto por ese conocimiento, que resulta finalmente descartado. El resultado es previsible: fracaso. Entonces ¡hay que esforzarse por entender!

En la primera alternativa, se puso la afectividad en primer lugar y como consecuencia del rechazo hacia el objeto, éste no pudo ingresar al conjunto de tus conocimientos: le cerraste la puerta de entrada. ¿Dónde se generó el disgusto? Obviamente en tus creencias, que pertenecen a la vida cognitiva, y en especial en tus experiencias previas.

Para incorporar un conocimiento a los ya existentes tenés que hacer un esfuerzo y poner en juego tus capacidades, pero nada de esto es posible si no te mueve el interés por el objeto. Y ¿cómo vas a interesarte por algo que no conocés? La respuesta es que tenés que "querer" el conocimiento, no sólo de ese objeto que se te presenta sino el conocimiento como objeto.

Tal vez no me entendiste. Querer el conocimiento es desear un pensamiento libre y palpitante que te permita enhebrar la cultura con tu inteligencia.

Sin afecto no hay interés ni necesidad, lo que lleva de inmediato a la desmotivación. La dimensión afectiva es medular en la construcción del conocimiento y no puede ser de otra manera ya que la sensación de malestar, angustia o inseguridad que experimentés tanto en clases como en los exámenes te impedirá, seguramente, pensar con claridad, y el agrado, la alegría y el bienestar te impulsarán hacia el objetivo.

Además, existen reacciones emocionales independientes de las clases y las pruebas: las que tienen que ver con el docente que imparte la materia, con los compañeros o tal vez, con los contenidos de la asignatura (tanto en naturaleza como en cantidad).

1.4 Componente conductual de la actitud

Es la componente activa de una actitud. Al reaccionar estamos develando nuestras actitudes, estamos mostrando qué nos produce determinada situación.

Cuando ponemos mucho empeño en conseguir algo y no lo logramos, nos sentimos frustrados y para mitigar este sentimiento recurrimos a mecanismos de defensa. Uno de ellos es la "huida": "no me presento a rendir el examen; firmo la hoja y me voy..." o bien desplazo en forma inconsciente la carga afectiva hacia otro objeto, por ejemplo el profesor y afirmo: "no lo soporto; no rindo". Éstas son manifestaciones de la conducta.

Otro mecanismo de defensa es la racionalización, que consiste en utilizar el razonamiento para justificar o explicar por qué hacer o no hacer algo. Entonces digo: "Ud. comprenderá que el trabajo, las obligaciones familiares, motivos de salud, son razones atendibles para que yo no haya podido concentrarme en forma adecuada en la preparación de esta asignatura".

Lo importante es que comprendas que las conductas no son innatas, se aprenden y en la medida que las reiteres serán cada vez más fuertes y te resultará más difícil modificarlas. La conducta es la "salida" ofrecida a la actividad conativa (impulsiva) la cual procesa motivos y valores (Ortiz, 1994 citado en Aparicio y Bazán, 1997).

Donald Campbell (citado por Bautista Vallejo, 1963) distingue tres manifestaciones conductuales que, en el terreno del aprendizaje de la matemática podrían sintetizarse así:

Verbalizaciones hacia el objeto	Expresiones de sentimiento hacia el objeto	Evitación del objeto
"La matemática es una porquería"	"Odio la matemática" "Me aburre"	"Firmo y me voy" "No me presento a rendir y... a otra cosa"

¿Reconocés haber reaccionado así?

1.5 Valor

El concepto de valor está íntimamente relacionado con el tema actitud. ¿Cuándo decís que algo es valioso? Seguramente, cuando despierta tu interés, cuando sentís deseos de conocerlo o tenerlo, cuando apreciás sus cualidades. En la valoración está comprometida la esfera afectiva de la persona. Si "sentís" que algo es importante para tu vida, lo valorás.

Se puede considerar que el valor está depositado en el objeto independientemente de lo que pensés de él, por ejemplo: "la matemática es valiosa aunque a mí no me guste", o bien, que se asiente en tu persona, por ejemplo: "para mí la matemática es valiosa aunque para otros no lo sea" (Maslow, 1964; Williams, 1968, citado por Bautista Vallejo).

En el primer caso, aceptás que la matemática "posee" el valor, independientemente de lo que represente para vos; en el segundo, vos le "concedés" el valor.

¿Qué se piensa en la actualidad? Se coincide con la segunda posición. Max Scheller afirma que el valor tiene raíz en las experiencias personales previas y por lo tanto, carácter subjetivo: algo es valioso porque así lo "sentís".

El valor constituye el "núcleo de la estructuración de tus actitudes, le sirve de apoyo, las sustenta y es más estable que éstas" (Hollander, 1998).

1.6 Modificación de actitudes

Si he logrado convencerte de que una modificación de actitud ante el aprendizaje de la matemática va a redundar en tu beneficio, pasemos a la manera de lograrla. Mi recurso, en este momento, es la comunicación persuasiva fundada en el afecto y se sustenta en la credibilidad que me concedas y en el modo en que lo recepcionés.

Dado que el sistema afectivo-emotivo es el encargado de procesar tus afectos y tus sentimientos; el sistema cognitivo, de representar conceptos e imágenes y el conativo-volitivo, de los motivos que te llevan a actuar de determinada manera, comprenderás que si querés modificar tus actitudes negativas deberás analizar los tres aspectos para determinar sobre cuál incidir.

La componente cognitiva procesa tu "archivo" de conocimientos. Sin cimientos no se puede edificar; por lo tanto, si tus conocimientos previos son escasos o débiles e inseguros no podés asentarte en ellos para seguir aprendiendo. Esto provoca inseguridad e indefensión. Todo parece excesivamente difícil, casi ininteligible. El camino está "bacheado" y te dificulta el avance,

a tal punto que lo previsible es que decidas sentarte al costado, desanimado, a llorar un ratito.

¿Qué podés hacer en este caso?

- Revisar la constelación de nociones previas antes de acometer el estudio de nuevos temas. Sólo la información que manejés con relación al objeto, te permitirá aprehenderlo (veremos esto nuevamente en otro capítulo).

- Prestar atención a tus creencias acerca de la matemática; nunca es tarde para cambiar de idea.

- Analizar tu concepción del estudio superior. Preguntate para qué estás haciendo el esfuerzo; si es lo que realmente querés; si coincidís con la afirmación de que "la enseñanza superior es a la vez uno de los motores del desarrollo económico y uno de los polos de la educación a lo largo de la vida" (Informe UNESCO, 1996).

La componente afectiva procesa tus sentimientos y emociones. Estados de ánimo, simpatías y pasiones influyen en la elaboración de los conocimientos. Sabido es que el amor, el odio, la ira y el temor ¡son capaces de sembrar la confusión hasta en la lógica!

Por otra parte, tus emociones no pasan inadvertidas para quienes te rodean: si sentís miedo o estás muy enojado, te ponés pálido; si algo te produce placer, se ruboriza tu piel.

- Deshacete de los sentimientos y emociones negativos hacia la matemática; valorate más; confiá en tus capacidades; planteate su aprendizaje como un desafío; vencé tu pasividad frente a la enseñanza, involucrate; no te sientas indefenso ni marginado.

- Recordá que los docentes poseen sus propias actitudes frente a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática: establecé una comunicación sincera con ellos. Planteales tus dificultades y expectativas.

- Con respecto a tus compañeros, concebilos como tus pares, los que están a tu lado para compartir el trabajo de aprender y tené en cuenta que muchas veces podrán ayudarte, así como vos a ellos. Sociabilizá el esfuerzo, no sólo para disminuirlo sino para hacerlo más placentero.

La componente conductual rige tus manifestaciones (tanto internas como verbalizadas) acerca de la matemática, tus impulsos e intenciones. Por ello, tratá de analizar tus reacciones; concentrate en lo que pensás y sentís durante las clases o las evaluaciones; dominá tus impulsos racionalizando su origen; reforzá tus intenciones positivas.

¿Qué factores o rasgos de tu personalidad deben ser tenidos en cuenta y qué debés hacer al respecto para mejorar tu actitud en el campo de la conducta?

- Tu expresividad. Tenés que tratar de mejorar tu forma de hablar y de escribir. Lo que comuniqués, tanto a profesores como a compañeros, debe ser entendido sin ambigüedades. Tenés que expresarte en forma clara y concisa.

- Tu autodisciplina. Ofrecé mayor resistencia a la frustración, no te desanimés ante los aparentes fracasos. Aumentá tu esfuerzo y tu dedicación al estudio. Sé persistente, tenaz.

- Tu organización. Planificá horarios de estudio, de recreación y de trabajo. El desorden sólo conduce a pérdida de tiempo, y el tiempo es irrecuperable.

- Tu disposición. Analizá tu posición frente a la universidad, el estudio superior, los profesores y los compañeros.

1.7 ¡No confundir actitud con aptitud!

Supongo que quedó claro qué es actitud y de qué manera influye en el aprendizaje. Las investigaciones realizadas en busca de la relación entre las actitudes de los estudiantes ante el aprendizaje de la matemática y el rendimiento de los mismos en la asignatura (Goolsby 1988; House y Priori 1998; Herrero et al. 1999 citados en Gargallo *et al.* 2007:2) permitieron afirmar que influyen notablemente: a mejor perfil actitudinal corresponde mayor rendimiento. Las variables psicológicas (por lo tanto endógenas) analizadas para determinar dicho perfil están íntimamente ligadas con la valoración que el estudiante hace: de profesores, exámenes y contenidos de la asignatura.

Por otra parte, podemos definir la aptitud como la competencia o idoneidad de una persona para realizar determinada tarea –en este caso aprender matemática– y aunque muchas veces se hace referencia a ella circunscribiéndola al factor mental cuando no a razones genéticas, en la aptitud personal inciden además, factores físicos, sociales y emocionales a los que puede agregarse la información de que se dispone al momento de comenzar el aprendizaje.

Sintetizando: en esta concepción, el término aptitud involucra habilidades, experiencias previas con relación al aprendizaje y ¡conocimientos básicos! Éstos nos hacen aptos para elaborar nuevos conocimientos.

Los razonamientos lógico, abstracto, numérico, inductivo y deductivo y las capacidades de análisis y de síntesis son habilidades (innatas o desarrolladas) que tienen que ver con la inteligencia lógico-matemática.

Las competencias para observar, comprender y expresar algo, así como la facilidad para razonar sobre la base de datos espaciales, también son aptitudes. Si no se poseen o no se las ha desplegado de manera conveniente, el

aprender se convierte en un proceso en extremo laborioso y lo que es peor, muchas veces, infructuoso.



SÍNTESIS

El objetivo de este capítulo ha sido mostrarte uno de los factores que pueden estar incidiendo en tu aprendizaje de la matemática: tu actitud. Constituye un elemento decisivo (no el único) para llevar a cabo con éxito el proceso de aprender.

Se analizaron las tres componentes de la actitud: cognitiva, emocional y conductual porque sabiendo lo que "sabés" acerca de la matemática, entendiendo lo que "sentís" en las distintas situaciones que se te presentan y comprendiendo por qué "reaccionás" de determinada manera podrás revertir o modificar tus creencias, valoración de la asignatura y conducta en pos de un buen aprendizaje.

Contemplamos también la importancia de la enseñanza recibida en los distintos niveles educativos y la influencia que los contextos –familiar, institucional y social– pueden haber tenido y determinado tu posicionamiento frente a la matemática.

Finalmente, hicimos referencia a la aptitud para el aprendizaje la cual, además del acervo de conocimientos básicos que supone tiene que ver con las capacidades mentales personales, habilidades adquiridas y competencias que se hayan desarrollado.

Capítulo 2

Nuestro cerebro

2.1 ¿El cerebro es una computadora?

Sobre este órgano fundamental recae la responsabilidad de supervisar el funcionamiento del sistema nervioso en su totalidad. Se encarga de controlar los movimientos de cada una de las partes de nuestro cuerpo, de regular las funciones que mantienen el equilibrio orgánico (los latidos del corazón, el flujo de la sangre, la presión y temperatura corporales) y de que aprendamos, experimentemos emociones y recordemos las cosas.

El cerebro es la poderosa "computadora" de que disponemos y es, por supuesto, superior aun a los ordenadores de última generación. Éstos surgieron de las ideas del hombre, son producto de la tecnología creada por su mente y fueron inventados para ayudarlo en su trabajo; por lo tanto, por perfectos que sean, no pueden superar al cerebro humano (a no ser en ciencia ficción). Llamar "computadora" al cerebro no pasa de ser una metáfora pues su funcionamiento no puede asimilarse al de un ordenador por varias e importantes razones. Una es que el cerebro humano posee, sobre cualquier computadora, una ventaja inestimable: mientras que ésta sólo puede realizar lo que el software le permite y se desactualiza con rapidez (¡si lo sabremos!), aquél tiene un poder de adaptación enorme ya que es capaz de crear permanentemente nuevas relaciones funcionales entre las células nerviosas (sinapsis) para ampliar su capacidad.

> Una sinapsis es una unidad, tanto desde el punto de vista de la forma como de la función. Puede concebirse como la conexión entre las dendritas y axones de las neuronas mediante la liberación de neurotransmisores (sinapsis química) o por corrimiento de iones (sinapsis eléctrica).

Otra diferencia es la integración, que consiste en la armonización funcional que lleva a cabo el cerebro sobre las distintas zonas implicadas en las

operaciones. En las computadoras esto no ocurre: cada algoritmo opera por su cuenta sobre los datos suministrados.

Además, como se ha verificado en personas que sufrieron daño cerebral, las neuronas "vecinas" de las afectadas por algún accidente se solidarizan con ellas, en algunas ocasiones, sustituyéndolas en el trabajo funcional. En las computadoras no existe tal sustitución.

Podemos agregar que el cerebro humano es capaz de realizar varias tareas en simultáneo mientras que los ordenadores realizan una tarea por vez.

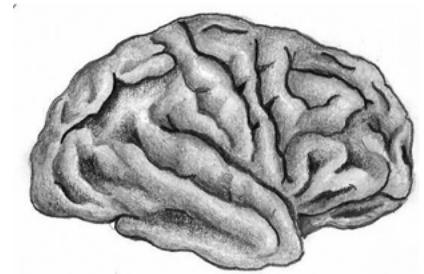
¡Ah!... a las computadoras las apagamos cuando queremos: el cerebro sigue funcionando aun cuando dormimos.

Si pese a todo deseamos llamar "computadora" a nuestro cerebro, deberíamos agregar la palabra emocional (lo que no es poco).

El propósito del siguiente ítem es mostrarte –a la luz de las investigaciones llevadas a cabo en el campo de la neuropsicología cognitiva, que se ocupa del conocimiento de las redes neuronales que subyacen en los distintos procesos cognitivos– las regiones cerebrales que se activan cuando se desarrollan distintas tareas intelectuales. Esta información, entiendo, puede ayudarte a comprender tu manera de pensar y de generar conocimientos a partir de tus capacidades personales. No se trata de presentar la descripción anatómica ni funcional del cerebro humano con profundidad científica, obviamente, sino de "mirarlo" desde una perspectiva que integre un conocimiento elemental de las regiones cerebrales en apariencia implicadas en cada función, con algunas cuestiones referidas al aprendizaje de la matemática.

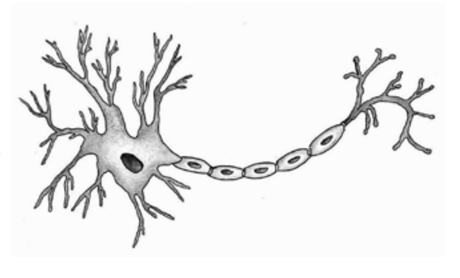
2.2 Los hemisferios y sus funciones

El cerebro es una masa blanda llena de pliegues y surcos, de aproximadamente 1,4 kg (en los adultos, por supuesto), formado por dos hemisferios casi simétricos separados por el cuerpo calloso cuyas fibras los conectan armonizándolos en la realización de las múltiples tareas mentales. Su actividad consume el 20 % de tu energía total.

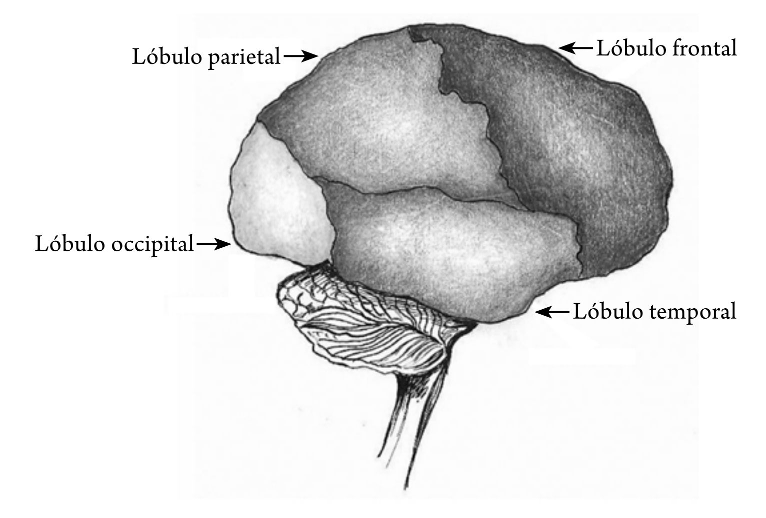


Está constituido por billones de células, las neuronas (con sus axones y dendritas) rodeadas por las neuroglias que les sirven de sostén y son algo así como un "pegamento" que las nutre.

Para explicar sintéticamente de qué se ocupa cada hemisferio del cerebro durante el proceso de aprendizaje de la matemática (haciendo la salvedad de que el funcionamiento cerebral es hoy objeto de numerosas investigaciones y por lo tanto, lo que se expone a continuación no tiene el carácter de irrefutable) es preciso identificar las regiones a las que haremos referencia.



Distinguimos en el cerebro zonas separadas anatómicamente por surcos y cisuras que reciben el nombre de lóbulos: frontal, parietal, temporal y occipital.



Los hemisferios cerebrales "piensan" –si se puede decir así– de distinta manera. El descubrimiento de esta dualidad funcional es mérito de los investigadores científicos Roger Sperry y Robert Oinstein (Salvatecci, 2002).

El derecho lo hace a través de imágenes; se "especializa" en cuestiones no verbales como la percepción espacial, el sentido artístico, el pensamiento creativo, la imaginación. Es el responsable de la invención de estrategias de pensamiento y de la elaboración de respuestas que incluyan imágenes y signos. Controla además la parte izquierda del cuerpo. Trata la información que le llega a través de los sentidos, en forma global, captando la totalidad, sintéticamente. Por ejemplo: frente a un paisaje, la percepción es total: no enfoca los árboles, el cielo o el río como entidades independientes sino como el conjunto que constituyen. A su actividad se la denomina

dextrohemisférica (dextro: derecha) y quienes poseen predominio de este hemisferio suelen ser considerados más creativos y más rápidos gracias a su simultaneidad visual.

El hemisferio izquierdo se ocupa del lenguaje en todas sus formas, es decir, de lo que hablamos y de la comprensión de lo que se nos presenta por escrito, sea con palabras o mediante símbolos. Es el cerebro lógico. Combina ideas y conceptos y luego los traduce a un lenguaje o idioma determinado. En él están localizados los centros del razonamiento y la habilidad numérica y las capacidades de abstracción y deducción. Considera la información por partes y efectúa el procesamiento de los datos en forma secuencial. Controla la parte derecha del cuerpo.

En el caso del paisaje antes mencionado, se ocupa de cada uno de los elementos constitutivos por vez: el agua, el cielo, la vegetación.

Los diestros somos mayoría. Serlo presupone un predominio del hemisferio izquierdo –que es algo más grande y pesado que el derecho– sin que esto implique ausencia de capacidades relacionadas con el otro hemisferio.

Un matemático puede a la vez ser un gran músico, como lo fue Iannis Xenakis; con habilidad para el lenguaje y mucha imaginación, Julio Verne escribió sus espectaculares novelas; el sentido musical unido a la capacidad verbal se manifiesta en las creaciones de cantautores como Joan Manuel Serrat. Podríamos mencionar muchísimos casos; la lista sería interminable.

Un concepto a tener en cuenta es el de plasticidad cerebral, que es la facultad que posee el sistema nervioso para modificar los "caminos" que conectan las neuronas. Cuando la reestructuración se lleva a cabo para sustituir una red sináptica dañada por otra hablamos de plasticidad reconstructiva; si se trata de anexar nuevos elementos a una red ya constituida, como ocurre durante el aprendizaje, la denominamos plasticidad adaptativa.

2.3 ¿Qué pasa en el cerebro cuando "hacemos" matemática?

La resolución de problemas matemáticos exige la colaboración de varias áreas del cerebro. Investigaciones en el campo de la neuropsicología han comprobado que la función cerebral que permite la realización de cálculos mentales –localizada en el lóbulo parietal inferior izquierdo– aparece disociada de la correspondiente al razonamiento lógico. ¿Te das cuenta? Se pueden realizar cálculos sin utilizar el razonamiento o sea, operar sin comprender por qué se procede de esa manera; estaríamos frente a una mecanización.

Además, el sentido numérico es independiente del lenguaje –afirman Cipolotti, Rossort *et al.* – y de la memoria –asegura Delazer (Alonso y Fuentes, 2001).

Los tomógrafos y resonadores magnéticos han permitido analizar el comportamiento del cerebro cuando se realizan sencillas tareas matemáticas, pero cuando la complejidad de las mismas es excesiva, la localización de las funciones no parece tan obvia y nos remite a la existencia de complejos circuitos cerebrales conectados entre sí.

> Existen dos enfoques diferentes que tratan de explicar cómo "aprende" el cerebro: el basado en la localización de las funciones y el holístico, que supone la consideración de la información en forma global.

Sin hacer hincapié en un "localizacionismo" funcional extremo veremos qué hemisferio interviene –según las teorías actuales– en cada etapa de resolución de un problema matemático.

PARTE DEL PROBLEMA	ACTIVIDADES	HEMISFERIO
1. Enunciado	Comprensión de lo escrito Detección de los datos Reconocimiento de las variables	Izquierdo
2. Esquematizaciones Figuras Símbolos	Percepción espacial Imaginación	Derecho
3. Establecimiento de relaciones entre las variables	Pensamiento lógico	Izquierdo
4. Elaboración de la estrategia para solucionar el problema	Imaginación y creatividad	Derecho
5. Operaciones Aplicación de propiedades	Cálculos matemáticos	Izquierdo
6. Interpretación del resultado. Expresión verbal de la solución Argumentaciones	Lenguaje oral y escrito	Izquierdo

De manera que para resolver un problema ¡hay que utilizar los dos hemisferios! Es importante, por lo tanto, descubrir si tenés orientación levohemisférica: serías "serialista", con facilidad para las operaciones secuenciales, el razonamiento lógico y la precisión en la palabra oral o escrita u orientación dextrohemisférica, en cuyo caso te encontrarías entre los "holistas", que son más rápidos en la resolución de los problemas, más creativos e integradores gracias a la facultad que les permite concebir la realidad como un todo y no como la suma de partes.

Si descubrís tu estilo natural de aprender podrás sacar provecho de eso pero deberás reforzar la actividad del otro hemisferio para equilibrarlos y lograr un mayor rendimiento.

La educación basada en el cerebro (brain-base education) es un tema relativamente nuevo que pretende vincular lo que hoy se sabe del funcionamiento cerebral con las diversas teorías del aprendizaje. Como ya dijimos: no todos aprendemos de la misma manera y es importante y facilitador que reconozcamos la propia.

Enfatizar durante la enseñanza o aprendizaje de la matemática la aplicación de reglas para operar y la memorización de propiedades y definiciones en detrimento de los otros aspectos, no es bueno o, por lo menos, no presupone un enfoque completo del proceso que lleva al conocimiento.

A continuación te presento dos maneras de encarar la definición de la circunferencia como sección cónica: en una se parte de un escrito; en la otra, de una imagen.



LEÉ LA SIGUIENTE DEFINICIÓN Y FÍJATE CÓMO PARTICIPA TU HEMISFERIO IZQUIERDO.

EN PALABRAS	TRABAJO PARA EL HEMISFERIO IZQUIERDO
Al seccionar una superficie cónica circular recta con un plano perpendicular a su eje se obtiene una curva llamada circunferencia.	- Seccionar (lenguaje). - Superficie cónica circular recta (concepto). - Plano (concepto). - Perpendicularidad (relación entre objetos). - Eje de la superficie cónica (concepto).

¿Podés, después de haber interpretado los términos y conceptos involucrados en la definición dada, realizar un esquema con todos los elementos mencionados para explicarle a alguien cómo surgió la circunferencia? Hacelo.

Necesitaste la ayuda del hemisferio derecho porque los conceptos intervinientes te remitieron en forma inexorable a representaciones mentales: usaste tu imaginación.



AHORA PROCEDAMOS DE OTRA MANERA: OBSERVÁ EL DIBUJO Y EL TRABAJO QUE LE CORRESPONDE AL HEMISFERIO DERECHO.

A partir de una imagen	TRABAJO PARA EL HEMISFERIO DERECHO
	- Percepción espacial. - Imaginación de los objetos en el espacio tridimensional y captación de la posición relativa entre ellos. - Percepción de la intersección entre los dos objetos. - "Movimiento" mental de la curva para su visualización en la hoja de trabajo.

Partiendo de que tenés claro qué es un plano, una superficie cónica, el eje de la misma y la intersección entre conjuntos de puntos ¿podrías explicarle a un compañero cómo se generó la circunferencia? Intentalo.

Para hacerlo debiste recurrir al lenguaje y al pensamiento lógico, es decir, al hemisferio izquierdo. Los hemisferios no trabajan de manera forma autónoma: se complementan, pero la forma de captar la información difiere de una persona a otra; por eso, cuando estudiés, elegí la manera adecuada a tu forma de pensar. Pero recordá: las palabras sin conceptos claros subyacentes son vacías; las imágenes sin conceptos asociados, son mudas. Volveremos sobre este tema cuando abordemos los distintos registros del lenguaje matemático.

2.4 El conocimiento

Como dijimos al comienzo del capítulo, la encargada de producir el conocimiento es esa imponente máquina biofísicoquímica llamada cerebro.

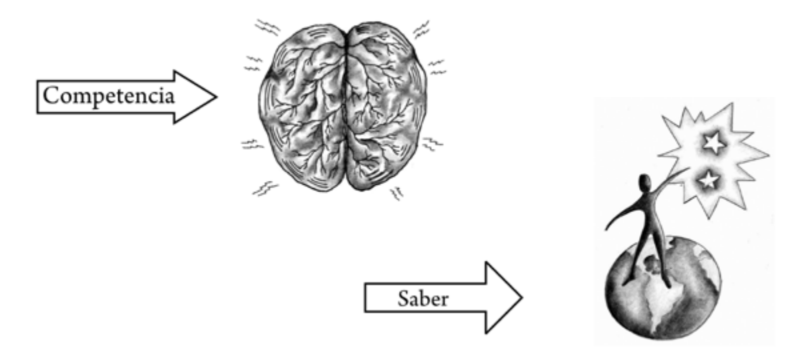
Si te preguntara qué es el conocimiento, ¿podrías responderme? Claro, parece fácil. Todos creemos saber qué es el conocimiento; sin embargo la cuestión no es tan sencilla. Para darse cuenta de eso hay que recurrir a la epistemología, una rama de la filosofía.

La información ¿es conocimiento? ¿Sabe más el que está más informado? Y la percepción, es decir, la sensación interna que resulta de impresión sensorial, ¿lo es? ¿Y la conceptualización? ¿Y la experiencia?

Tal vez deberíamos afirmar como lo hizo Metrodoro de Chío (filósofo griego de la corriente del escepticismo) que no sabemos si sabemos y ni siquiera sabemos qué es saber.

La idea de conocimiento nos es familiar, convive con nosotros, es parte de nuestra vida, pero al ensayar una definición, la palabra conocimiento ¡¡estalla!!, se deshace en miles de fragmentos. En el estallido perdimos la noción de si era "el conocimiento" o "los conocimientos" lo que tratábamos de definir. ¿Se trata de un ente único, universal o estamos hablando de cosas distintas? Los asteroides originados en la explosión del concepto se llaman: información, percepción, reconocimiento, conceptualización, juicio; junto a ellos aparecen observación, experiencia, comprensión, causalidad. Para construir conocimiento matemático tenemos que recurrir a todos ellos.

Para Edgar Morin, todo conocimiento requiere de una competencia, que es la aptitud para producirlo; una actividad cognitiva, que es la que pone en juego la aptitud y un saber, como resultante de esta actividad (Morín, 1994: 20)



Cuando aprendemos, las neuronas comienzan a aumentar el número de conexiones que las ligan; se crean nuevas redes sinápticas para que la información que llega al cerebro sea incorporada a lo que ya se sabe. Si algo se aprende mal, lo que se le vincule con posterioridad será incorrecto, y tratar de deshacer la huella dejada por el aprendizaje errado para corregir el camino, mucho más penoso que aprender "bien" de entrada. Ésta es la razón por la cual, antes de intentar un nuevo aprendizaje, es necesario "revisar" lo que subyace en el cerebro, es decir, en los constructos organizados en redes. Éstos serán más sólidos cuanto más fuerte sea la conexión establecida entre los conocimientos previos.

Aprender es una tarea mental, una actividad intelectual cuyo objeto es la consecución de un saber que pueda ser utilizado como instrumento pero,

que a la vez, se constituya en objeto. Aclaremos esto: el saber es un instrumento ya que debe estar disponible para resolver los problemas que se nos planteen –saber matemática es saber hacer cosas con lo que se aprende– pero adquiere la calidad de objeto porque debe ser germen de nuevas preguntas que lleven a otros saberes. Si se parte del supuesto de que el estudiante sólo aprende gracias al esfuerzo que realice para retener lo que se le informa, lo más probable es que el aprendizaje se vea reducido a la memorización de los temas expuestos.

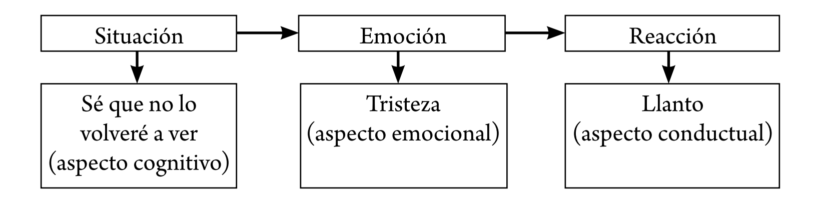
2.5 Las emociones

¿Qué te resulta más placentero: realizar los cálculos matemáticos inherentes a determinado problema o enfrentarte con el desafío de solucionarlo a través del razonamiento?

Dije placentero… ¿Qué tiene que ver acá el placer? Mucho, porque cuando hablamos de actitud frente al aprendizaje hicimos referencia a la componente emocional que incide en el proceso de aprender facilitándolo u obstaculizándolo (afirmación con fundamentos psicológicos y neurológicos).

No se sabe cuál es la naturaleza de las emociones. Algunos psicólogos afirman que se trata de juicios de valor acerca de una situación que hay que enfrentar y, desde este punto de vista tendrían una raíz cognitiva.

Partamos de una situación: Saber que no lo volveré a ver me hace llorar.

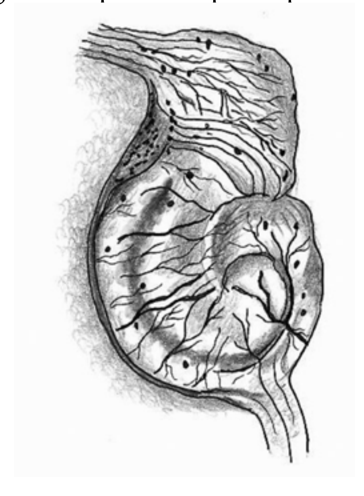


El avance en el estudio del comportamiento neuronal permite postular una interacción entre los juicios de valor acerca de determinada cuestión y las señales corporales suscitadas. Un concepto, una proposición, una situación parecida a otra ya vivida, una imagen, hacen surgir una emoción (placentera o no).

Las emociones, presentes en toda actividad humana que implique comunicación entre las personas –y por lo tanto, también en el proceso de aprendizaje– se generan en las amígdalas cerebrales. Sí; se llaman amígdalas –igual que las de la garganta– y son las encargadas de procesar y almacenar las reacciones emo-

cionales. Éstas tienen, además, relación con la modulación de la memoria. Parecen dos almendras y se encuentran situadas detrás de los ojos, en el extremo inferior del hipocampo. Claro… ahora te preguntarás qué es el hipocampo…

Fijate en el siguiente dibujo.



En la parte media de cada uno de los lóbulos temporales hay una región curva que tiene forma parecida a un caballito de mar (de ahí el nombre de hipocampo).

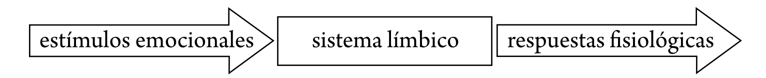
Volvamos a las amígdalas. Si una situación particular te provocó miedo o angustia –por ejemplo la presentación a un examen oral–, la amígdala se encargó de formar el condicionamiento de estas emociones y su posterior almacenamiento. Ante otra evaluación de las mismas características volverás a sentir miedo o angustia.

Todo suceso emocionante por algún motivo hará que se active la amígdala y contribuya a retener la información relacionada con él: aquello que nos provocó un impacto emocional se recuerda más.

Las valoraciones, que hacen que algo nos resulte importante o no, nacen de la relación entre las mencionadas amígdalas y los lóbulos prefrontales (ubicados detrás de la frente). Tanto la amígdala como el hipocampo forman parte del sistema límbico, responsable de la vida afectiva de una persona, entre otras funciones.

El sistema límbico está constituido por: tálamo, hipotálamo, hipocampo, amígdalas, cuerpo calloso, séptum y mesencéfalo. Se lo suele llamar cerebro emocional.

Cuando un estímulo emocional llega al sistema límbico, éste responde a través de manifestaciones fisiológicas (por ejemplo: temblamos, transpiramos o tartamudeamos si tenemos miedo).



Con este sistema, conectado a la corteza cerebral, se relacionan la atención y la memoria.

2.6 Atención y memoria

Atendemos, recordamos y nuestra personalidad nos dicta cómo conducirnos.

—"¡Presten atención!" Es una expresión que usamos los profesores durante las clases y el verbo prestar indica que solicitamos algo que les pertenece: su atención, y que de ustedes –los estudiantes– depende que obtengamos o no, lo requerido.

Prestar atención a algo es desentenderse de todo lo que rodea ese "algo" para captarlo mejor; implica una temporaria desconexión de los factores que no son momentáneamente relevantes. Es importante comprender que si nuestro campo atencional es muy amplio (si queremos prestar atención a varias cosas a la vez) disminuye el poder de concentración sobre cada uno de los objetos presentes, pero si un determinado estímulo nos absorbe, se desdibuja el entorno del mismo. Por eso, durante una clase, la concentración en el tema que se está desarrollando exige dejar de lado los ruidos provenientes del exterior (pasillos, patios, calles), las conversaciones periféricas ajenas al tema y por supuesto… ¡los teléfonos celulares! Éstos son factores de distracción auditivos, pero también influyen los visuales (movimientos realizados a tu alrededor) y de hecho, tus propios pensamientos. Cuando estás centrado en ellos, parecés ausente del escenario del aula ¡y el profesor se da cuenta!

Los esquemas, los dibujos y colores empleados en un texto, el tono y la inflexión de la voz del docente durante su discurso, influyen en la disposición de la atención ¿lo has notado? Nos llama más la atención aquello que impresiona nuestros sentidos agradablemente (en esto se apoyan los publicistas); por el contrario, una alocución monocorde y sin inflexiones o un tono de voz destemplado, hacen que pronto dejemos de prestar atención.

Podés distinguir dos momentos en tu atención: aquél en que decidís que vas a prestarla voluntariamente porque el tema te interesa (estás motivado) y el otro, el de mantener dicha atención. Ambos están signados por tus expectativas, personalidad y estilo cognitivo, es decir: por el valor formativo que le estés confiriendo al tema con miras a tu futuro profesional y a tu inserción cultural; por tus características psicológicas, entre las que se cuenta la ansiedad –por lo general, difícil de manejar– y por tu personal manera de aprender (como se dijo al tratar las funciones de los hemisferios cerebrales).

¿Cuántas veces escuchaste: "– ¡la matemática no se aprende de memoria!?" Obviamente, no se repiten las cosas de memoria sin comprenderlas, pero es cierto que "no se aprende sin memoria". Ella no puede ser "desechada" en ningún aprendizaje; tampoco en el de la matemática.

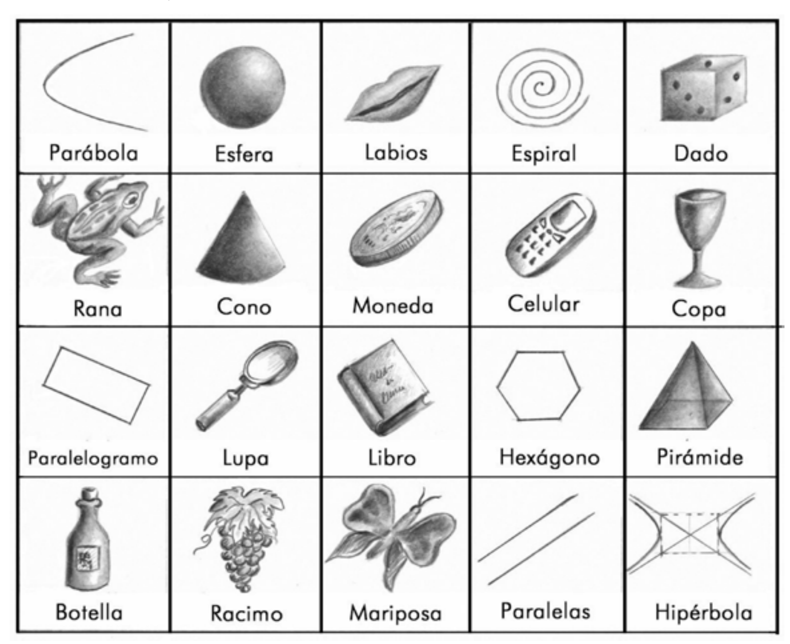
¿Adónde se almacenaría la información ya consolidada, indispensable para construir nuevos conocimientos? ¿Y las habilidades ya desarrolladas? ¿De dónde salen las ideas y conceptos que deben relacionarse con inteligencia para lograr un aprendizaje significativo? De la memoria, que es la función cerebral gracias a la cual el ser humano retiene las experiencias y conocimientos adquiridos con anterioridad.

Inteligencia y memoria se asocian durante el aprendizaje, complementándose. La primera no puede establecer relaciones entre datos si la memoria no se los suministra; la segunda no "recoge" ni "almacena" datos si la inteligencia no la dirige.



PROBEMOS CÓMO ANDA TU MEMORIA VISUAL.

Observá el siguiente conjunto de imágenes con sus nombres durante 30 segundos. Controlá el tiempo.



Ahora, cubrí con una hoja en blanco (no transparente, por supuesto) el conjunto de imágenes y escribí, en los casilleros, los nombres de los objetos que recordés.

¿Cuántas palabras recordaste?	Minievaluación
Más de quince	¡Excelente!
Entre diez y quince	Bastante bien
Entre cinco y nueve	Regular
Menos de cinco	Pobre

Si no recordaste muchas, no te preocupés. Toda capacidad se puede mejorar mediante la ejercitación.

¿Cómo funciona la memoria? Cuando un estímulo llega al receptor, se establece una conexión sináptica. Si no recordás qué es, la culpa es de tu memoria o mejor dicho, tuya (ya vamos a ver por qué). La señal recibida es enviada al núcleo neuronal con objeto de mantener el "recuerdo" para luego producir la consolidación de la red.

Aclaremos esto. Sin entrar en una taxonomía (clasificación) profunda, podemos decir que existen tres tipos de memoria con sus correspondientes subsistemas: sensorial, operativa y a largo plazo.

La *sensorial* recibe los estímulos captados por los sentidos –imágenes, sonidos, olores, texturas, gustos– y los transforma en "recuerdos" disponibles para cuando los requiramos. ¿Recordás el rostro de tu mejor amiga de la infancia?, ¿la melodía de tu canción favorita?, ¿el olor del perfume de una rosa?, ¿la rugosidad de la cáscara de una naranja?, ¿el gusto del helado de limón?

Como sólo transferimos aquello a lo que le prestamos atención, algunas sensaciones –las que de alguna manera despertaron nuestro interés– pasarán a la *memoria operativa* o *memoria a corto plazo* que dispone de dos "depósitos": el de la información verbal y la agenda visual-espacial. Como su nombre lo indica, los datos de la memoria operativa no permanecen ahí por mucho tiempo; sólo el necesario para que se pueda operar con ellos.

La atención que prestés al tema, movido por tus intereses, afectos y motivación, decidirá qué cosa, por considerarla interesante o útil, va a ser "retenida"; lo que no interesa, no se recuerda: se descarta.¡Si no recordaste lo que era sinapsis es porque no prestaste atención!

Algo a tener en cuenta: el desempeño de la memoria a corto plazo se ve afectado cuando pretendemos realizar distintas tareas al mismo tiempo.



EN EL MAYOR DE LOS SILENCIOS, TRATÁ DE MEMORIZAR LA SIGUIENTE LISTA DE PALABRAS:

meridional	espectral
utópico	responsable
pedagogo	asexuado

Cubrilas con un papel y anotá, en otro, las palabras que recordés.

AHORA PRENDÉ LA RADIO O EL EQUIPO DE MÚSICA (CON ACEPTABLE VOLUMEN) Y MEMORIZÁ ESTE SEGUNDO GRUPO:

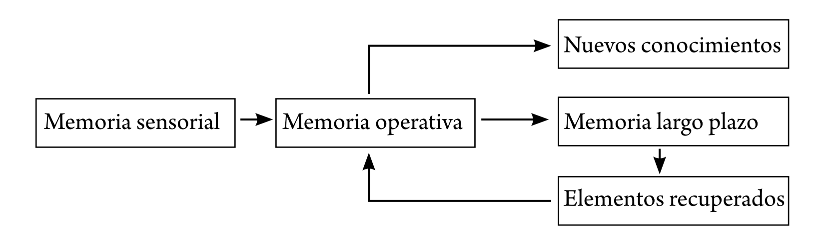
septentrional	velocidad
circunvalación	relevante
láser	neurosis

Anotá las palabras recordadas.

No te pido que calculés en cuántos minutos lograste cada memorización sino que evalués el esfuerzo mental que te exigió cada una. La conclusión queda por tu cuenta.

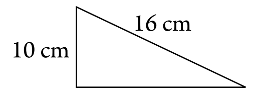
Por último, ya procesada por la *memoria a corto plazo,* la información pasa a la memoria a largo plazo, nuestra base de datos. Allí se almacenan conocimientos, imágenes, conceptos, estrategias. Su capacidad es enorme. No tengas miedo: no se agota así nomás. El cerebro recupera de ella, cuando se trata de generar nuevos conocimientos, los datos que se precisan.

Sintetizando: el funcionamiento del sistema de la memoria sería algo así:



Consideremos ahora un elemental problema de geometría para reconocer las memorias intervinientes al momento de resolverlo.

Supongamos que tenés que calcular el valor del cateto mayor del triángulo dibujado.



Ya sé que es muy fácil… pero para hacerlo, aun sin darte cuenta, tu mente responde a las siguientes preguntas:

- ¿Qué tipo de triángulo es el de la figura?
- ¿Qué nombre reciben los lados? ¿Cuál es la hipotenusa?
- ¿Qué teorema permite vincular las medidas de sus lados?
- ¿Cuál es la fórmula que los relaciona?

La observación de la figura te lleva a reconocerla como representación de un triángulo rectángulo (memoria sensorial visual).

Debés recordar, además, que la hipotenusa es el lado que se opone al ángulo recto y que el teorema pertinente es el de Pitágoras (memorias: semántica y procedimental).

> Tanto la memoria procedimental (que guarda las estrategias para resolver los problemas, las destrezas adquiridas y las habilidades logradas) como la semántica (que conserva los significados de los términos y las relaciones entre conceptos) constituyen subsistemas de la memoria a largo plazo siendo la primera, implícita (saber cómo) y la segunda, declarativa (saber qué).

Otro elemento a "buscar" en la memoria a largo plazo es la tesis del teorema, tanto en palabras como de manera simbólica:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $a^2 + b^2 = c^2$

Sigue un trabajo de codificación (qué lado es **a**, cuál **b**). De hecho, a la hipotenusa se la ha denominado **c**.

Como hay que despejar el cateto mayor (supongamos que lo llamás a para que "concuerde" con la expresión simbólica previa) tenés que operar algebraicamente: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Acá utilizás la memoria de trabajo: operaciones (la sustracción como operación inversa de la adición y la radicación como inversa de la potenciación) y procedimientos (el mantenimiento de la igualdad cuando se sustrae a ambos miembros un mismo número y su subsistencia cuando se extrae raíz cuadrada a ambos miembros). También recordás que hay que considerar el valor aritmético de la raíz cuadrada dado que se trata del cálculo de una distancia.

Finalmente, reemplazás en la expresión algebraica anterior **b** y **c** por los datos suministrados y procedés al cálculo de **a** recordando que la radicación no es distributiva con respecto a la sustracción (cuestión que muchos estudiantes suelen olvidar).

A través de este sencillo ejemplo he querido ilustrar el juego entre percepción, memoria y estrategias que ha realizado tu mente para obtener, a partir de la información, una respuesta. Obviamente razonaste utilizando los elementos que guardaba tu memoria a largo plazo y con el auxilio de los recursos de tu memoria operativa.

Cuando se dice: ¡No memorizar! ¡Razonar! es porque se está señalando la importancia del razonamiento lógico deductivo (propio de la matemática) frente al recurso –muchas veces empleado y otras muchas, fallido– de tratar de memorizar sin comprender.

No es necesario "desdibujar" el papel de la memoria ya que las dos funciones – memorización y razonamiento– no son antagónicas ni excluyentes; por el contrario: deben complementarse.

Cuando decimos: catetos, hipotenusa, raíz cuadrada, potencia, cubo, etc. "arrastramos" –desde la memoria a largo plazo y a través de las palabras– los conceptos aprendidos previamente con esos nombres.

Cuando se pretende que un estudiante de primaria emplee los símbolos $>$ **y** $<$ (que tanto le cuestan) ¿no se recurre a la memorización de expresiones como "se come a" asociando la imagen de una boca al sentido de las desigualdades?

Todos los símbolos matemáticos se guardan en la memoria después de haberles encontrado sus significados. Y los lógicos, y las fórmulas, y las tablas de multiplicar, y las derivadas elementales, y las integrales inmediatas.

¿Recordás qué se calcula con las siguientes expresiones?

$2\pi R = ¿?$ $\qquad \pi R^2 = ¿?$ $\qquad \frac{1}{2} . b . h = ¿?$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = ¿?$ $\qquad a^2 + 2ab + b^2 = ¿?$

Al demostrar un teorema, con frecuencia es necesario recurrir a artificios que de por sí no surgen del razonamiento sino que hay que recordar, por ejemplo:

Trazamos por el punto P una paralela al lado "tal" o bien: formamos una función auxiliar $\varphi(x) = \ldots$ o sumamos y restamos "tal expresión" al segundo miembro.

Al estudiar vinculamos mediante el razonamiento la estructura de los conocimientos previos existentes en nuestra mente con nuevos objetos; por lo tanto, que debemos recordar ciertas cosas… ¡es absolutamente cierto!



SÍNTESIS

Mencionamos en primer lugar, las razones por las cuales el cerebro humano no puede asimilarse totalmente a una computadora pese a las semejanzas que puedan encontrarse entre las redes neuronales y los circuitos lógicos de una máquina.

A través de la consideración de las distintas zonas del cerebro y de las funciones localizadas por los psiconeurólogos en cada uno de los hemisferios, he intentado que percibas la armoniosa actividad desplegada por el cerebro en el proceso de comprensión de un problema matemático. Hemisferio izquierdo (analítico) y hemisferio derecho (sintético) confluyen y sintonizan sus actividades cuando se trata de abordar un problema o elaborar un concepto.

Nos pusimos frente a la idea de conocimiento con el objeto de apreciar los numerosos aspectos que la palabra encierra: información, percepción, discernimiento, conceptualización, juicio y junto a ellos, observación, experiencia, comprensión, causalidad.

Analizamos el papel de las amígdalas cerebrales y el hipocampo en la formación de las emociones, que siempre acompañan a los procesos de aprendizaje y permiten explicar las reacciones conductuales que solemos tener.

Sencillos ejemplos matemáticos y algunas propuestas de actividad mental jalonaron el capítulo con el propósito de evidenciar la importancia de la interconexión hemisférica, de la atención y de la memoria cuando se estudia matemática.

Lo que aprendemos depende, además de las capacidades intelectuales que poseamos, de la atención que prestemos, de nuestra memoria (que tiene que ver, en parte, con la atención prestada), de la propia personalidad –que a través de nuestro temperamento y carácter nos dispone de determinada manera ante el estudio– y de la conducta que tengamos frente a las exigencias planteadas y al esfuerzo requerido.

En este capítulo he dedicado un ítem a cada una de ellas recurriendo, en el caso de la memoria, a un sencillo ejemplo que evidencie el poder de concentración de la atención y de posterior memorización cuando estudiamos en silencio y cuando se incorpora un factor de distracción auditivo (radio o TV).

Mediante un problema sencillo como es la aplicación del teorema de Pitágoras he intentado indicarte qué elementos recuperás de tus memorias (a largo plazo y a corto plazo) a medida que avanzás en la resolución del problema planteado.



Capítulo 3

¿Qué es ser inteligente?

3.1 La inteligencia

Basta buscar la palabra *inteligencia* en el diccionario de la Real Academia Española (DRAE) para darse cuenta de los numerosos aspectos que la definición contempla.

Trascribo:

1. Capacidad de entender o comprender //2. Capacidad de resolver problemas //3. Conocimiento, comprensión //4. Sentido en que se puede tomar una sentencia o expresión //5. Habilidad, destreza, experiencia.

Observando las primeras cinco acepciones de la palabra inteligencia (existen otras), notamos que no se especifica qué debemos entender o comprender, de qué naturaleza son los problemas a resolver, en qué áreas se ubican los conocimientos y la comprensión que se pretende, en qué contextos deben buscarse los sentidos ni para qué son las habilidades, destrezas y experiencias requeridas. ¿Habrá que entender que para ser inteligente hay que "cumplir" con TODO lo propuesto en la definición, es decir, resolver cualquier tipo de problemas que se nos presente, tener conocimiento de todas las ciencias, interpretar cualquier escrito (judicial, médico, económico, político, sociológico…), poseer habilidades y destrezas (manuales, artísticas, corporales…) y experiencia en cualquier terreno, o bastará con satisfacer alguno de los aspectos señalados?

No me agrada esa concepción de "inteligencia" –tal vez la más corriente– que circunscribe el buen desempeño de las personas a determinado campo (generalmente el científico). ¿No son inteligentes quienes se destacan en otras áreas?

¿Alguien se atrevería a negar inteligencia a los máximos exponentes del arte? Pensemos en la pintura y en Van Gogh, Gauguin, Picasso; en la escultura y en Fidias, Miguel Ángel, Rodin; en la música y en Mozart, Bach, Beethoven.

En el mundo de la literatura, excelentes escritores nos han legado (y nos ofrecen en forma permanente) visiones del mundo de la política, de la sociedad, de la economía, de la psique, de la civilización, del amor…

¿No son inteligentes los bailarines, los deportistas, los atletas? Por lo general, cuando alguien sobresale tempranamente en alguno de esos campos se dice: "tiene aptitud para tal cosa", es decir, posee una capacidad natural para realizar determinada actividad, pero nunca se hace referencia al potencial de su cerebro. Por eso me parece adecuado el planteamiento de Howard Gardner respecto de la existencia de distintos tipos de inteligencia. Lo bueno de este enfoque es que podemos admitir con satisfacción que todos somos inteligentes y que siempre existe la posibilidad de desarrollar las distintas inteligencias que en alguna medida poseemos, hasta lograr un buen nivel de desempeño en cada una.

Gardner, en Estructuras de la mente (2000) propone la consideración de siete "inteligencias" distintas. ¡Siete! (Anexó luego una octava: la *inteligencia naturalista*). Trataré de sintetizar su interesante teoría.

Una persona que es capaz de comprender lo escrito y expresarse correctamente sea en forma oral o escrita posee *inteligencia lingüística.* Esto implica tener conocimientos de sintaxis (enseña a coordinar las palabras y las oraciones para expresar claramente los conceptos), de semántica (se refiere a la significación de las palabras) y de retórica (la teoría de la expresión hablada).

Si en la corrección de un examen tu profesor consignó: "mal expresado" es porque te falló la sintaxis; si al escucharte dijo: "no te entiendo", tenés que mejorar tu retórica; si el problema es semántico…, ¡no sabés de qué estás hablando!

Un científico es una persona que posee gran capacidad para trabajar con extensas cadenas de razonamientos, que tiene habilidad para realizar categorizaciones y clasificaciones entre elementos y para discernir (distinguir entre una cosa y otra señalando las diferencias). Posee *inteligencia lógico-matemática,* que contempla los procesos de vinculación entre objetos, comprensión de las proposiciones matemáticas, abstracción, inducción y deducción.

Además de estas dos inteligencias, privilegiadas en la consideración social, existen otras. La *cinético-corporal* incluye habilidades físicas como coordinación, equilibrio, destreza, fuerza, flexibilidad y velocidad y por lo tanto está referida al manejo de las distintas partes del cuerpo.

Si podés utilizar manos, piernas y brazos con eficiencia y seguridad, serás, posiblemente, un buen artesano, un destacado deportista o un eximio bailarín. Analizá tus posibilidades y sacá provecho de las condiciones que la Naturaleza te dio.

Quienes tienen desarrollado el sentido de la percepción espacial y la habilidad para graficar y percibir líneas, formas y colores, poseen *inteligencia espacial* –afirma Gardner–. Ejemplos de ello son pintores, escultores, artesanos y arquitectos. ¿No dibujás o pintás?

No creo que sea necesario aclararte en qué consiste la *inteligencia musical.* Los músicos son capaces de distinguir tonos, timbres y ritmos y sobre la base de ellos, componer y/o interpretar. ¿Tocás algún instrumento?

La *inteligencia interpersonal* es la capacidad para distinguir los estados de ánimo, intenciones, motivaciones y sentimientos de quienes nos rodean. ¿De qué manera? A través del tono de voz que emplean, de los gestos que realizan, de las expresiones que usan.

El docente "sabe" qué están sintiendo sus alumnos en cada momento (o debería saberlo). Las "señales" que percibe deben alertarlo. Recordá la introducción de este libro. Caras de "no me importa", "me aburro", "no entiendo nada", "no me agrada" son más que suficientes para interrumpir la clase y buscar otra forma de encararla. Si alguien no se da cuenta de lo que sucede a su alrededor, carece de inteligencia interpersonal y no puede actuar de manera efectiva, lo que no es sólo una pena: es limitante en el plano social.

Por último, existe la *inteligencia intrapersonal,* que se define como la capacidad para comprenderse uno mismo (nada fácil ¿no?), para conocer las propias posibilidades y limitaciones. Cuando hablamos de autoestima hacemos referencia a la necesidad de valorarnos, de construir nuestra propia imagen con la mayor honestidad posible (algo así como "mirarnos" con objetividad, desapasionadamente). Ésta es la inteligencia que nos permite acceder al conocimiento de nuestro temperamento, estados de ánimo e intereses. La tarea posterior consistirá en dirigirlos de manera conveniente.

Ante ese panorama, uno se pregunta: ¿cuán inteligente soy?; ¿qué tipos de inteligencia deberé reforzar o desarrollar para tener éxito en la vida?; ¿cuáles intervienen en mi aprendizaje de la matemática?

No se trata de ser un "genio" (no abundan; no te preocupés) pero sí de tomar conciencia de las posibilidades personales y no desaprovecharlas (lo que exige esfuerzo, sin duda). El reconocimiento de nuestras fortalezas y debilidades nos va a ayudar a afirmar las primeras y modificar las segundas. Los factores herenciales nos dotan de determinadas condiciones que si son desenvueltas en forma apropiada harán que nos destaquemos en alguna esfera, que tengamos éxito.

Es frecuente escuchar expresiones como: "Fulanito tiene una facilidad increíble para el dibujo" o "Menganita nació para la música"; esto no impli-

ca, por supuesto, que Fulanito no pueda tener un buen desempeño en matemática o Menganita no pueda dedicarse a la literatura si se lo propone. El tema es que, aun gozando de esas aptitudes, si no las desarrollan mediante el estudio y el ejercicio es probable que Fulanito y Menganita no lleguen a destacarse. No basta con las condiciones: se precisa escuela.

Es importante comprender que hay que aprovechar las condiciones naturales pero, a la vez, realizar el esfuerzo necesario para abonar el resto de las “inteligencias”. Pensándolo bien: prefiero tener un nivel aceptable en la mayor cantidad de inteligencias posibles y no un cien por cien en una de ellas y cero en las restantes. ¿Y vos?

Mirá: consideremos 2 de las 8 inteligencias descritas. Si en una de ellas –de ser posible calificarla– obtuvieras un 10 (en la escala del 1 al 10) y en la otra, un 0, tu “promedio” sería 5; pero si en las dos inteligencias consideradas obtuvieras una calificación “buena” (6 ó 7), el promedio sería mayor.

La inteligencia por sí misma no engendra la Ciencia ni el Arte (aun siendo el germen de sus creaciones). La educación, la voluntad para desenvolverla y el medio en el cual se está inserto son factores de indiscutible importancia para el crecimiento de la misma.

La potencia del intelecto, que suele asociarse con la inteligencia lógico-matemática (aunque ésta constituya sólo un aspecto de aquélla), aumenta con el hábito de razonamiento, el estudio de la lógica, el uso de un lenguaje formalizado y la ejercitación que consolida el disciplinamiento mental.

Cuando tratamos las zonas cerebrales implicadas en la resolución de un problema matemático (Cap. 2) quedó establecido que participan tanto la inteligencia lógico-matemática como la lingüística y la espacial, de lo que se deduce que hay que incentivarlas a todas.

3.2 Algunas sugerencias con respecto al desarrollo de las inteligencias

a. Si tenés problemas con la comprensión de un escrito o con la interpretación de los enunciados y las consignas:

- Efectuá una primera lectura prestando mucha atención y releé el texto, de ser necesario, hasta encontrarle el sentido (aspecto sintáctico).
- Subrayá los términos cuyos significados desconozcas o te planteen dudas.
- Recurrí al diccionario o al libro adecuado para esclarecerlos (aspecto semántico).
- Volvé a leer el escrito para ratificar su comprensión.

- Intentá expresar lo leído empleando tus propias palabras.

- Si se trata de una pregunta o consigna que no comprendés, permutá los elementos de la oración hasta que captés su sentido.

b. ¿Te cuesta expresarte o hacerte comprender?

- Acostumbrate a estudiar en voz alta. Escuchate. Hablá con vos mismo para organizar tus propios pensamientos (Pimm, 1999:51).

- Explicale los temas a un compañero de estudio y escuchá lo que él dice. Establecé diálogos de aprendizaje.

- Estructurá interrogantes sobre el tema para que tu compañero los responda y solicitale preguntas que deberás, a tu vez, contestar.

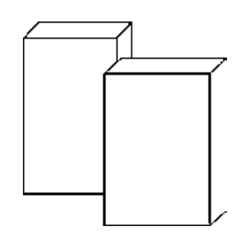
- Redactá por escrito tus respuestas y pedile a tu compañero que las lea para constatar lo que entiende. Intercambiá los papeles: leé lo que escribió y expresalo oralmente. Realizá las críticas oportunas y aceptá las que te hagan.

- Mejorá tu caligrafía. Recordá que nadie está obligado a descifrar lo que escribiste. Una letra ilegible predispone mal a quien corrige.

- Cuidá tu ortografía. Constituye un reflejo de la atención que prestás a lo que leés y además, de tu condición de lector. Quien lee mucho, difícilmente tendrá mala ortografía.

c. ¿Te resulta difícil la percepción del espacio?

- Ejercitala con frecuencia. Una forma de hacerlo es la que te propongo a continuación. Observá el dibujo:



Completá, con línea de puntos y desde tu posición de observador:

La cara lateral derecha del prisma que está más lejos de tus ojos.

1. La base del prisma cercano.
2. La cara posterior del prisma de adelante.
3. La cara lateral izquierda del prisma de atrás.

- Dibujá planos en distintas posiciones y agregá al dibujo, rectas que les pertenezcan y otras que los intercepten en forma perpendicular u oblicua.

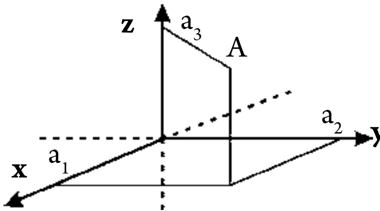
- Graficá esferas, conos, pirámides, cilindros y seccionalos con distintos planos. Ensayá sombreados imaginándolos iluminados desde la derecha o desde la izquierda.

Vivimos en un mundo de tres dimensiones o por lo menos son las que captamos. ¡Vaya a saber qué captan los extraterrestres (si es que existen)! Pero nosotros, habitantes de la Tierra, nos desplazamos a lo largo y a lo an-

cho de ella y también hacia arriba o hacia abajo dado que podemos viajar en aviones y descender hacia el fondo de los mares. La percepción del espacio tridimensional es absolutamente indispensable.

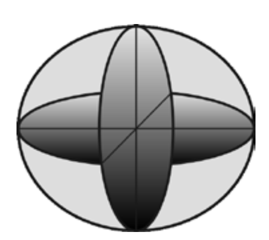
La ubicación en el plano, de un punto del espacio de tres dimensiones exige conocer tres números ordenados –las tres coordenadas cartesianas– es decir, una terna y para ello necesitamos un sistema de referencia adecuado. Si un punto A se encuentra a $\mathbf{a}_1$ unidades de un origen prefijado sobre uno de los ejes, a $\mathbf{a}_2$ sobre otro eje y a $\mathbf{a}_3$ sobre el eje perpendicular al plano determinado por los otros dos, lo indicamos así: A $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

El sistema de referencia (que se define de manera arbitraria para ubicar el objeto en la hoja de trabajo y que no constituye el único sistema referencial existente) está en este caso formado por tres rectas perpendiculares entre sí que reciben los nombres de eje de abscisas, eje de ordenadas y eje de las cotas. En el sistema cartesiano ortogonal estos ejes se designan comúnmente con las letras **x, y, z.**



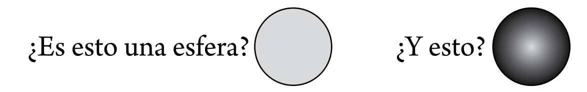
La orientación de los ejes es convencional y en este caso, dextrógira, es decir que alguien parado en el origen de coordenadas con su cabeza sobre el eje $\mathbf{z}^+$, indicará con su brazo derecho al eje de abscisas $(\mathbf{x}^+)$ y con el izquierdo, el de ordenadas $(\mathbf{y}^+)$. Es fundamental tener en cuenta la orientación del espacio cuando se observan gráficos en los libros de texto. ¡Se nos puede "dar vuelta" el mundo!

Sobre la superficie terrestre, la referencia se hace con respecto a dos planos que se cortan perpendicularmente: el plano del Ecuador y el plano meridiano que pasa por la localidad de Greenwich. Las coordenadas geográficas son la latitud y la longitud del lugar. Si no estuviéramos "sobre" la Tierra deberíamos agregar la altura (si voláramos) o la profundidad (si se nos diera por bucear).



Dado que nuestro ambiente físico es tridimensional ¿no te parece lógico que debamos recurrir en forma permanente a la percepción de tal espacio? Por otra parte, es imposible formar el pensamiento matemático si se carece de capacidad para intuir y elaborar imágenes mentales en tres dimensiones. Pero una cosa son los objetos materiales o abstractos y otra, sus representaciones, que son convencionales y cumplen la función de "evocarlos".

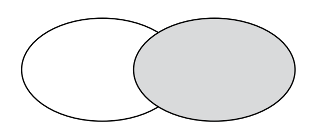
Los aspectos a tener en cuenta en los dibujos son el sombreado, la superposición y la perspectiva.



¿Es esto una esfera? ¿Y esto?

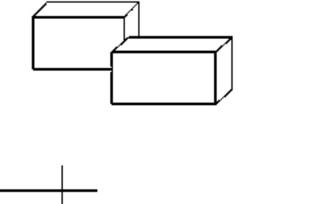
La sombra, en el segundo caso, le dio volumen al dibujo y cambió la percepción del objeto, que es el conocimiento del mismo por contacto visual.

Cuando se superponen figuras el cerebro "ordena" las imágenes decidiendo cuál de ellas está más cerca del observador.



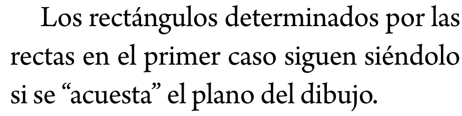
En este caso, pese a estar sobre el mismo plano –el de la hoja– la elipse de color parece estar más adelante; la superposición permite determinar posiciones relativas entre objetos.

Cuando dibujamos objetos tridimensionales "alteramos" dimensiones y distorsionamos ángulos, pues así es como los percibimos. La perspectiva recrea profundidades y posiciones relativas entre cuerpos.

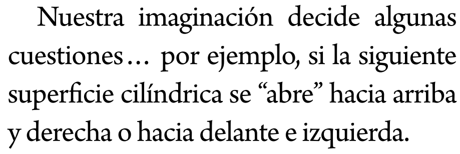


¿Dudarías acaso de que los ángulos de todas las caras de estas cajas son rectos?

Es también importante la idea de movimiento del plano sobre el cual hemos dibujado.

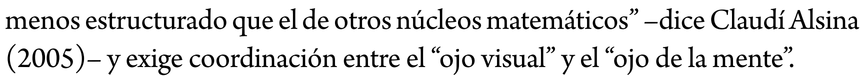


Los rectángulos determinados por las rectas en el primer caso siguen siéndolo si se "acuesta" el plano del dibujo.



Nuestra imaginación decide algunas cuestiones… por ejemplo, si la siguiente superficie cilíndrica se "abre" hacia arriba y derecha o hacia delante e izquierda.

La facilidad para efectuar representaciones no se desarrolla sola: hay que practicar. "El aprendizaje geométrico está menos estructurado que el de otros núcleos matemáticos" –dice Claudí Alsina (2005)– y exige coordinación entre el "ojo visual" y el "ojo de la mente".



d. ¿No te resulta fácil comunicarte con los demás? Es hora de empezar a practicarlo.

- Acercate a otros grupos en el aula.

- Preguntale algo a un compañero no habitual.
- Esmerate por ser atento, amable.
- Desterrá expresiones de indiferencia, de aburrimiento y de fastidio.
- Controlá tus reacciones.
- Reíte con frecuencia.

La comunicación es básica para sentirse bien y fundamental para el desarrollo personal y profesional. Recordá que la gente evita a las personas antipáticas (generan rechazo) y que las muy introvertidas pueden llegar a sufrir aislamiento.

Finalmente, para tu formación integral y plena, desarrollá tu inteligencia corporal (hacé ejercicios o deportes) y musical (bailá cada vez que puedas, ejecutá un instrumento, escuchá música, cantá). Tenés las siete inteligencias, sólo que algunas se destacan sobre las otras. En esto radica la diferencia entre los seres humanos: en su forma de aprender y de concebir y disfrutar el mundo.

Seguramente es más inteligente quien vive mejor a partir de sus condiciones biológicas naturales, de las posibilidades de realización que se le han brindado a lo largo de su vida y del contexto cultural en el que se encuentra inmerso.

Cuando descubras con cuál de las inteligencias estás teniendo problemas, habrás comenzado a solucionar "el" problema. Esto es lo que hay que comprender y atender. Tendrás que disponer de tiempo para ejercitar dicha inteligencia y hacer que la misma alcance un desarrollo adecuado, sea a partir de tu propio esfuerzo o solicitando ayuda, de ser necesario.

3.3 Intuición, imaginación y creatividad

El conjunto de estudiantes del curso está trabajando para tratar de solucionar un problema de mediana dificultad que les he presentado. Los observo: algunos dan vuelta las hojas de sus carpetas buscando –supongo– algún ejercicio parecido al planteado; otros tratan de agruparse con los que los rodean para aunar esfuerzos. Pareciera que la actividad va para largo…

Me acerco a Andrés –que me está mirando– y compruebo que culminó con éxito la tarea.

Andrés –pregunto– ¿cómo llegaste tan rápido al resultado?

–No sé… Miré los datos, pensé un ratito… y se me "pintó" la solución.

–Bien. Digamos que empleaste la intuición...

¿Sabes qué es la *intuición*? Los especialistas en ciencias cognitivas la conciben como una facultad de la mente que posibilita llegar a un conocimiento en forma espontánea; es lo que se conoce como sexto sentido.

Por intuición, la idea hace su aparición "de golpe", sin el sustento del razonamiento consciente (no quiere decir que no se razone) y sin la aplicación de una estrategia previamente ensayada (no reproduciendo los pasos de problemas anteriores). Es algo así como una inspiración, un acto espontáneo que en los estudios psicológicos sobre el aprendizaje se conoce con el nombre de insight (comprensión súbita).

Intuir es tener percepción de algo sin la intervención directa de los sentidos ni de las reglas que rigen el pensamiento lógico pero sin descartar la participación de experiencias previamente vividas y guardadas en el inconsciente. Si por intuición intelectual llegás a la solución de un problema, seguramente existían en tu mente "chispazos" capaces de generar luz sobre el tema.

¿Dónde nace la intuición? Es una función del cerebro vinculada con la inteligencia. Recordá que la ciencia experimentó avances monumentales gracias a la intuición de mentes brillantes. Albert Einstein afirmó que "a la hora de hacer ciencia, lo único valioso es la intuición"; los grandes matemáticos vislumbraron relaciones entre conceptos, propiedades y teoremas a partir de sus personales intuiciones.

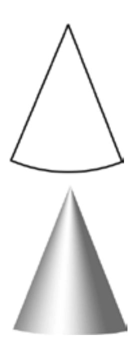
Podés probar la tuya cuantas veces quieras animándote, también, a expresar tus ideas en clase. Pero después hay que demostrar lógicamente lo intuido y en ese momento es indispensable recurrir a los conocimientos previos y hacer un buen uso de la razón para formalizar los resultados. No debés inhibirte si te equivocás ni bloquearte si no encontrás las palabras para explicar tu idea. La intuición, pese a ser considerada un talento, precisa de ejercitación y confianza.

¿Creés que se puede aprender matemática sin imaginación? No. No se puede, porque los objetos matemáticos son abstractos, ideales, y necesitamos realizar en forma permanente representaciones mentales de ellos, lo que se consigue a través de la imaginación. Su papel, por lo tanto, es crucial en el aprendizaje. Podemos afirmar sin temor a equivocarnos que las imágenes constituyen el pensamiento humano, son parte esencial de él. La mente utiliza tanto palabras como imágenes. El procesamiento de los datos que llegan al cerebro requiere –como ya dijimos– de la participación de los dos hemisferios: el que se relaciona con las palabras y el que se ocupa de las imágenes.

Cuando hablamos de una imagen mental es porque nos estamos representando el objeto, lo estamos creando y podemos llegar a describirlo como si lo viésemos.

¿Qué es esto?

Bien: un sector circular. Imaginá el círculo completo y estimá el valor del ángulo central correspondiente al sector.



Ahora observá el siguiente dibujo.

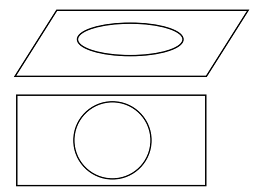
¿Qué es?

Seguramente respondiste: un cono. Las líneas que forman ambas figuras en la hoja de papel son las mismas pero el sombreado nos "hace ver", en una figura bidimensional, un cuerpo sólido. Imaginamos lo no visible: la base –que es un círculo–, la parte de atrás –que es una superficie curva como la de adelante. Lo imaginaste.

El cerebro se encarga de anexar información a lo que los ojos perciben: agrega bordes y profundidad; recuerda colores y texturas; incorpora elementos que no se ven pero que se sabe que están allí.

En el ejemplo presentado en el capítulo anterior para definir la circunferencia por intersección de una superficie cónica circular recta con un plano, las palabras describen el objeto y el cerebro "acomoda" los datos recurriendo a las imágenes guardadas en la memoria.

Así, si vemos una figura como ésta, que es una elipse, por acomodación espacial del plano en que se encuentra, podemos aceptar que se trata de una circunferencia –que también es una elipse– "acostada" en un plano horizontal.



Si "alzamos" el plano hasta disponerlo verticalmente, vemos la circunferencia.

Hemos imaginado el "movimiento" del plano.

Alguien dijo: "Si puedes imaginar algo, puedes comprenderlo y para comprender algo tienes que imaginarlo". Me pareció adecuado en lo que a la comprensión matemática se refiere.

Probá tu imaginación: pensá en una parábola que abre hacia arriba; hacela rotar alrededor de su eje e imaginá la superficie que va engendrando en su movimiento. La figura resultante es un paraboloide de revolución (es obvio por qué se llama paraboloide y por qué de revolución ¿no?).

"Cortá" mentalmente esta superficie con un plano horizontal ¿qué obtenés? ¿Y si la cortás con un plano que esté más arriba que el anterior? ¿Y si seguís "subiendo" el plano?

Proyectá mentalmente las curvas obtenidas en la hoja de papel. ¿Qué obtuviste?

Cuando imaginamos algo, "eso" es parte de nuestra creación; es un conocimiento que nos pertenece. En el ejemplo precedente, creaste un sistema de curvas de nivel a partir de un paraboloide, es decir, una familia de circunferencias concéntricas. Es sólo un sencillo ejemplo.

Esa extraordinaria y mentada facultad llamada *creatividad* –consignada con frecuencia como objetivo de la enseñanza de la matemática en cualquier nivel– constituye una de las cualidades esenciales del ser humano, es su atributo más significativo, ya que conjuga su inteligencia con su emotividad.

Cuando un pintor crea su obra, le agrega, a su inteligencia, la imaginación y la emoción; los grandes descubrimientos tecnológicos son producto de los conocimientos, la imaginación y la creatividad de los inventores. Tener creatividad es poder inventar cosas.

Así como no basta con el sentimiento para crear (porque hay que poseer conocimientos), tampoco alcanza con los conocimientos pues es indispensable poner fuego interior, el alma. Nadie crea nada si no se apasiona por lo que está haciendo.

Es tan complejo el fenómeno de la creatividad que no se lo puede circunscribir al mero aspecto cognitivo ni en exclusiva a la afectividad o reducirlo a cuestiones de índole psicológica o biológica. La creatividad involucra todos estos aspectos pero fundamentalmente puede pensársela como la manifestación superior de la potencia que posee el ser humano para realizarse. Se trata, sin duda, de una función compleja que requiere de la memoria, la intuición, la imaginación, el conocimiento y la emotividad.

En la nota "Secretos de la creatividad" de Alejandra Folgarait para "adncultura" *La Nación* (17 de mayo de 2008), la autora, basándose en investigaciones del campo de las ciencias neurocognitivas afirma que a las personas les resulta fácil reconocer en otros la capacidad para imaginar y crear apartándose de lo convencional o estipulado, para intuir a partir de lo observado, pero lo que no resulta tan sencillo es establecer la manera adecuada de desarrollarla en uno mismo y por supuesto, en los demás.

Existen numerosas publicaciones acerca de cómo desarrollar la creatividad en matemática. No las voy a comentar. Me conformaré con contar (como lo hice antes con la atención, la memoria y las inteligencias) cuá-

les son las zonas cerebrales que parecen estar implicadas en ese magnífico "don": la creatividad.

Cuando hicimos referencia a la localización de las funciones cognitivas en los hemisferios cerebrales, ubicamos a la imaginación (ligada a la creatividad) en el hemisferio derecho y depositamos en ella la responsabilidad de idear estrategias originales para la solución de los distintos problemas y para crear imágenes mentales a partir de las percepciones sensoriales. Pero aclaramos que las distintas zonas se interconectan a través del cuerpo calloso y que los circuitos neuronales forman redes (¿recordás?).

En la nota antes mencionada, la autora recupera una cita de Facundo Manes, director del Instituto de Neurología Cognitiva (INECO) que transcribo: "No existe un solo centro cerebral ligado a la creatividad. El cerebro opera en red y en el proceso creativo se activan distintos circuitos neuronales".

La creatividad está relacionada con la memoria (de donde, seguramente "recoge" datos en forma inconsciente) y con las emociones (en los artistas, cuestión harto evidente) por lo que se implican, además de la corteza prefrontal, las amígdalas y el hipocampo.

En la actividad matemática, con cursos numerosos, es difícil atender en forma conveniente las dotaciones individuales de inteligencia lógico-matemática para alentarlas y guiarlas hacia un fin superior que incluya la creatividad. El tiempo del que se dispone para efectuar el tratamiento de los contenidos fundamentales del programa es por lo general, escaso y el dominio de éstos, indispensable para asegurar la igualdad de oportunidades de crecimiento a todos los estudiantes (aun lo no "brillantes" en matemática).

Podría contarte con qué ahínco se trabaja en la concreción de proyectos educativos tendientes a favorecer la creatividad; mencionarte los métodos que se proponen para estimularla (elaboración de conceptos, resolución de problemas); informarte sobre los distintos niveles en que puede ser tratada la creatividad (personal, grupal, social); referirme a los productos de la actividad creativa (expresión, novedad, calidad), pero de nada valdría exponer extensas teorías sobre la creatividad si no se pusiera el acento en la personal disposición que debe acompañar a tus capacidades.

Podrás crear si poseés sustentos sólidos para tu pensamiento, placer por la actividad matemática, inteligencia lógica que te permita encadenar en forma adecuada tus razonamientos, curiosidad para explorar más allá de lo que el programa de la asignatura propone, capacidad para observar, abstraer, comparar, generalizar y proponer estrategias y soluciones.

Si te sentís libre para pensar caminos distintos hacia la solución de un problema, dispuesto a imaginar formas en el espacio y a operar mentalmente con ellas y lográs una motivación tal que tu interés y tu atención se sostengan sin esfuerzo, podrás "descubrir" cosas nuevas. Serás creativo.



SÍNTESIS

Este capítulo aborda la teoría de Howard Gardner sobre las inteligencias múltiples. Mi objetivo es hacer que comprendas que todos somos inteligentes y que diferimos sólo en el nivel de desarrollo de las distintas "inteligencias".

La lógico-matemática (la que normalmente se considera cuando se dice que alguien es inteligente) es sólo una de las inteligencias que posee el ser humano, pero si careciera del resto sería un ser incompleto.

Las inteligencias lingüística, interpersonal, kinestésica, intrapersonal, musical y espacial hacen que comprendamos lo escrito y podamos expresarnos con claridad, nos entendamos con quienes nos rodean, nos movamos con libertad y armonía, tomemos conciencia de nuestra interioridad y capacidades, disfrutemos de las composiciones musicales y tengamos una percepción adecuada del espacio en que vivimos.

Completamos una panorámica mención a las funciones mentales con una breve referencia a intuición, imaginación y creatividad, características específicas del ser humano que pueden conducirlo a la plenitud y, en ocasiones, a la genialidad.

Capítulo 4

El lenguaje de la Matemática

Los alumnos están rindiendo un parcial. Son muchos, muchísimos… La mayoría está concentrada escribiendo, borrando, utilizando las calculadoras… pero también están (¿están?) los otros, los que, apoyando la cabeza en el flexionado brazo izquierdo –por lo general–, pierden la mirada en un punto lejano, tan lejano que podría pensarse en otro lugar, fuera del aula.

Me acerco a uno de ellos. No escribe. ¿Piensa o se evade?

—¿Qué te ocurre? –pregunto.

—Nada… –responde–. Y al cabo de unos segundos, se anima y me ofrece alguna de las siguientes respuestas, que me inquietan, sin duda…:

No entiendo lo que me preguntan.

No sé qué quieren que haga.

No interpreto el dibujo.

No puedo expresar en palabras (o en símbolos) lo que está
en símbolos (o en palabras)

"¡Qué problema con el lenguaje!", –pienso.

4.1 ¿Qué es la comprensión?

> La verdadera comprensión no se cansa nunca del interminable diálogo y de los círculos viciosos porque confía en que la imaginación aferrará al menos un destello de luz de la siempre inquietante verdad. Arendt, Hanna (1995)

Los profesores preguntamos con frecuencia: ¿comprendés lo que te digo? o bien ¿comprendiste lo que leíste? Creo que previamente deberíamos ponernos de acuerdo en si comprendés lo que significa "comprender".

La comprensión es de por sí un proceso complicado, una actividad indispensable y continua a través de la cual tratamos de "acomodar" los nuevos

datos proporcionados por los sentidos, a lo que ya sabemos. Al decir "datos" me refiero a palabras, conceptos, relaciones, formatos relacionados con cualquier aspecto (lingüístico, cultural, científico, social).

En el proceso de comprensión, los datos provenientes del exterior se unen en forma coherente con los que están guardados en la memoria a largo plazo. No es lo mismo comprender que conocer, pero en el proceso de comprensión se debe recurrir al conocimiento previo para "engarzar" en él lo nuevo.

Si se te pidiera que dibujaras un hipogrifo descendiendo del monte Athos, ¿qué harías? En primer lugar debés tener la idea de lo que es un hipogrifo, al que no has visto nunca obviamente (yo tampoco), y por otro lado, deberías saber qué es el monte Athos, dónde está, qué lo caracteriza…

Te sugiero recurrir al Diccionario de la Real Academia Española (DRAE) y buscar la acepción adecuada al texto, para hipogrifo, y a una enciclopedia, para el monte Athos.

Sin la idea y los conocimientos de "base" no se puede comprender nada y menos aun tratar de dibujarlo.

Si en matemática no comprendés los conceptos elementales, no podrás estructurar nuevos conocimientos. Por eso se insiste tanto en que la formación básica debe ser sólida.

¿Qué sentido tendría que te dijeran que la derivada de una función es el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero si no supieras qué se quiere decir con "variable independiente", con "cociente incremental" y con "límite"? ¿De qué te serviría repetir la definición de derivada de memoria? ¿Cómo podrías aplicar el concepto para resolver problemas?

La comprensión tiene por función acrecentar el conocimiento y trascenderlo –ir más allá– ya que es la encargada de darle sentido a las cosas. Es el poder que posee el pensamiento para realizar futuras y distintas actividades, por ejemplo: explicar a alguien determinado tema, hallar ejemplos que lo clarifiquen, efectuar representaciones, aplicar el conocimiento a situaciones nuevas.

El mayor o menor nivel de comprensión de una persona se evidencia a través de sus posibilidades de realizar tareas. Éstas han sido denominadas desempeños de comprensión y en todo aprendizaje y enseñanza de la matemática constituyen un pilar importantísimo, mucho más relevante y fructífero que la mera ejecución de cálculos o la memorización de propiedades.

Dijimos que para comprender algo es necesario recurrir a la memoria y recoger de ella aquellos conocimientos que tengan que ver con los datos que llegan. La memoria, que almacena hechos en forma implícita, recibe el nombre de semántica y está incluida en la memoria a largo plazo.

¿Te imaginás la cantidad de cosas que debe conservar la memoria a largo plazo? El número de archivos de tu memoria es ¡ENORME! Si tuvieras que efectuar el recorrido de la interminable lista de conocimientos archivados –lo que resultaría agotador– es posible que olvidaras alguno o que te confundieras (como suele pasar en los exámenes ¿no?). La única manera de localizar en la memoria los conocimientos ocasionalmente requeridos es tener el "depósito" en orden y bien estructurado.

Lauren Resnick y Wendy Ford (1990) afirman que la clave para comprender las bases conceptuales de la matemática es la noción de estructura, es decir, la forma en que se organizan internamente los conocimientos. Una estructura incluye conceptos, relaciones que los vinculan, operaciones que pueden realizarse entre ellos, propiedades que rigen tales operaciones, fórmulas y procedimientos que permiten resolver los problemas.

La comprensión matemática es además de un proceso, una finalidad, tanto para vos como estudiante como para mí, como partícipe de la tarea. Exige dedicación y esfuerzo de ambas partes y cuando se logra, la satisfacción es sin duda compartida.

4.2 ¿Qué es interpretar?

Es muy probable que alguna vez, al exponer un tema, te hayan dicho: "no interpretás lo que estás diciendo". ¿Te preguntaste qué es interpretar?

Por definición, interpretar es atribuir un significado personal a los datos contenidos en la información que se recibe. Esto constituye un proceso de semiosis que exige, entre otras cosas, efectuar una selección previa de los conocimientos del campo en el que se está trabajando.

Fijate en las definiciones de la palabra "entorno" que figuran en el DRAE:

1. Ambiente, lo que rodea // 2. *Inform.* Conjunto de condiciones extrínsecas que necesita un sistema informático para funcionar (tipo de programación, de proceso, características de las máquinas) // 3. *Mat.* Conjunto de puntos vecinos a otro // 4. Pliegue que se hace a la ropa en un borde.

Para la misma palabra existen cuatro acepciones diferentes, lo que nos dice que la palabra entorno no tiene el mismo significado en contextos dis-

tintos, aunque tres de ellas parten de la idea de conjunto (la 3[ra] corresponde al campo de la matemática).

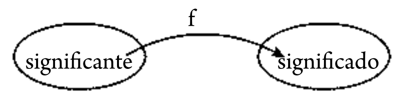
Según Godino (2002: 9-19) el problema semántico es el que ocasiona mayores inconvenientes en el aprendizaje de la matemática y entiende por tal, el referido a la naturaleza de los conceptos y proposiciones matemáticas y su adecuada ubicación en el contexto.

Observá el siguiente gráfico:



¿Con qué lo asociás?

Bien. Con relación funcional entre dos conjuntos. Démosle nombre a los elementos relacionados:



f: es una función semiótica. ¿Te atrevés a definirla?

Seguramente dijiste que una función semiótica es aquella que relaciona un significante (antecedente) con un significado (consecuente).

¿Qué es un significante? Una palabra, un símbolo, un gráfico, algo que representa un concepto o idea. El elemento original en la correspondencia –el que pertenece al primer conjunto– es el significante; su imagen, el significado, que sólo puede existir si disponés de los conocimientos que le den sentido en cada uno de los casos que se te presenten. De la organización mental que hayas dado a los conceptos dependerá la interpretación que realicés.

Cada acto de semiosis te exigirá que relaciones una idea con el lenguaje específico y el correspondiente contexto. Cuando lo logrés recién podrás decir que tenés un conocimiento ya que ¡habrás encontrado el significado!

La noción de significado es esencial para la educación matemática. No se puede pretender comprensión si no se tiene claro qué es el significado. Pimm (1995) afirma que "lo que entendemos por comprensión y significado está lejos de ser obvio o claro a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en cualquier nivel". Siendo el significado el contenido al que se refiere el emisor de una expresión o el que interpreta el receptor –lo que quiere decir uno o lo que entiende el otro–, cuando los significados atribuidos a dicha expresión por dos personas son diferentes se produce un conflicto semiótico. Éste es uno de los factores que obstaculizan el aprendizaje.

Juan Godino y Salvador Linares (2000), de las universidades de Granada y de Sevilla respectivamente, en su trabajo "El interaccionismo simbólico en educación matemática" presentan su posicionamiento con respecto a la noción de significado, el papel del lenguaje en el aprendizaje y el rol desempeñado por la negociación de significados matemáticos para que las clases se desarrollen con fluidez.

4.3 El lenguaje

> El lenguaje participa en la vida a través de los enunciados concretos que lo realizan así como la vida participa del lenguaje a través de los enunciados. Bajtin, Mijail (1982)

Observo a mi alumno: la forma de apoyarse en el banco, la posición y el movimiento de sus manos, la expresión de su mirada me indican, momento a momento su participación (por presencia o ausencia) en el discurso. Sus demostraciones gestuales o corporales constituyen una respuesta a lo que estoy diciendo: una aceptación o un rechazo, o simplemente, la indiferencia ante la alocución.

Son precisamente las múltiples manifestaciones del que está en la posición de oyente, las que informan al que habla (y a quienes observan el acto) del grado de comprensión logrado por el que escucha. Creer –afirma Bajtin (1982: 257) – que existe, por un lado el hablante y por otro el que comprende u oye, y que se conectan entre sí por una corriente, es desconocer la complejidad del acto discursivo.

Ante un discurso siempre hay una respuesta porque aun la no-respuesta la constituye. El discurso permite que el que habla y el que escucha se ubiquen en un mismo espacio cuyo sistema de coordenadas está representado por la lengua. Necesitamos del discurso para aparecer en la escena del mundo y el lenguaje es el instrumento. Lo haremos con mayor o menor eficacia en función de los recursos con que contemos.

Es indudable la interdependencia entre lenguaje y desarrollo conceptual: si se carece de conceptos no hay comprensión de la palabra que lo identifique y recíprocamente, la carencia de vocabulario hace imposible la acomodación del concepto.

Decime si alguna vez:

- tuviste dificultad para comprender los enunciados de los ejercicios propuestos en el examen;

- te sentiste con imposibilidad para redactar, en forma coherente y articulada, las respuestas a los problemas planteados;

- notaste que te faltaba el vocabulario preciso para expresar tus pensamientos;

- te costó utilizar la simbología lógico-matemática;

- no interpretaste de manera adecuada los gráficos y/o esquemas presentados;

- consideraste excesivamente difícil la teoría de la materia;

- las preguntas te resultaron "poco claras";

- hiciste bien todos los cálculos y no supiste responder correctamente acerca de los conceptos involucrados en el ejercicio.

En muchos casos puede haberte fallado la comprensión de los conceptos pero en otros, la comprensión del aspecto discursivo.

Para Chomsky (1983: 219)

> el lenguaje está profundamente comprometido con el pensamiento [...] Si hay un déficit importante del lenguaje habrá forzosamente un déficit importante en el pensamiento [...] existe correlación entre ejecución lingüística e inteligencia [...] ya que las personas inteligentes usan el lenguaje mucho mejor que las demás.

Por otra parte –según lo comprobó Vigotsky (1993)– el desarrollo del lenguaje incide favorablemente en el desarrollo de la inteligencia.

Numerosas investigaciones han logrado constatar que el rendimiento intelectual del alumno está vinculado en grado sumo con su comprensión lingüística. Si la información llega fallada al cerebro porque no tenés claro el significado de los términos o no podés contextualizar el problema, la capacidad de razonamiento se ve trabada y no actúa (o lo hace erróneamente).

Un bajo nivel de comprensión lectora redunda en un deficiente resultado en matemática (¡y en el resto de las disciplinas!) Debés, por lo tanto, tratar de elevar el dominio del lenguaje, no sólo específico sino coloquial (natural). ¡Hay que leer más!

¿Te queda claro que no hay conocimiento posible si no se entiende lo que se lee o escucha y que no hay transferencia si no se sabe hablar o escribir? Si no podés unir el significado con el significante por medio de una oración, las palabras, desarticuladas entre sí, pasan a ser sólo un "ruido", algo así como si de una melodía se hubiesen aislado distintos sonidos y se pretendiera, por parte del que escucha, la reconstrucción "in mente" de la obra.

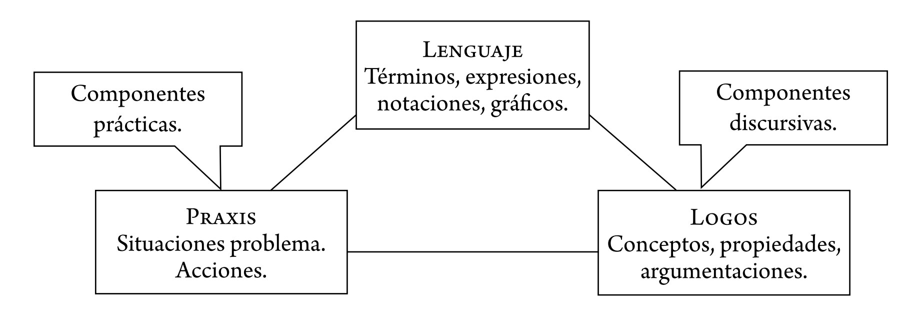
4.4 El papel del lenguaje en la formación del conocimiento matemático

Cuando pregunto a algún estudiante –¿no entendés la matemática o no comprendés el castellano?– estoy exponiendo mi duda acerca del objeto de su entendimiento: el conocimiento matemático involucrado en la pregunta o enunciado, o el aspecto discursivo de los mismos. En el segundo caso estamos frente al problema del lenguaje, que constituye un importante obstáculo para el aprendizaje de la matemática.

A partir de allí, demostrar deductivamente, construir enunciados correctos y expresar con palabras algún concepto se convierte en un "infortunio" de los más penosos.

El siguiente triángulo ilustra la manera en que interviene el lenguaje en la formación del conocimiento matemático.

Observalo:



Los vértices inferiores del triángulo corresponden a los aspectos denominados práctica y teoría los cuales, debido a cuestiones de carácter operativo, suelen ser escindidos.

En el vértice superior se ha colocado el lenguaje. Agrupa términos, expresiones y símbolos, notaciones y gráficos que vinculan la *praxis* y el logos. Este enfoque corresponde a la noción de praxeología (del griego: praxis: acción, práctica y *logia:* doctrina, teoría, ciencia). El término fue definido por Chevallard como "una manifestación de la mente humana que comienza con la intuición apriorística de la acción y culmina con las implicaciones y justificaciones de la misma" (citado en Godino, 2002).

Sin el lenguaje es imposible comprender lo que el logos contempla ni interpretar lo que la praxis incluye.

4.5 Un breve acuerdo semántico

Es fundamental que coincidamos en el significado de las siguientes expresiones:

a. *Objeto matemático:* todo aquello susceptible de ser mostrado, indicado o señalado cuando se enseña o se aprende matemática.

b. *Conceptos:* objetos mentales producto de la relación existente entre los conocimientos básicos que poseemos acerca de un objeto material o abstracto y las ideas forjadas en nuestro pensamiento (Peirce, citado por Oostra, 2001). Se presentan mediante definiciones o descripciones que reflejan las cualidades del objeto o fenómeno y facilitan su comprensión.

En el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969 citado en Godino et al, 2006) la expresión "objeto matemático" es utilizada como sinónimo de "concepto matemático"

c. *Proposiciones:* encadenamientos de palabras con sentido completo; permiten afirmar o negar cosas y pueden ser calificadas de verdaderas o falsas. Estructuralmente, poseen sujeto y predicado, es decir, son oraciones que vinculan los conceptos.

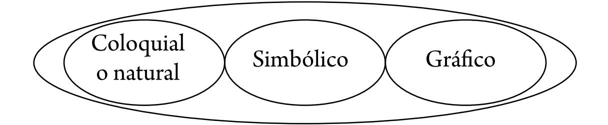
d. *Argumentos o razonamientos:* constituidos por cadenas de enunciados que tienen por objetivo validar o explicar las proposiciones y los procedimientos. Podemos hablar de razonamientos inductivos (cuando pasamos de datos particulares a la generalización) y deductivos (cuando a partir de la ley o principio general pasamos a situaciones particulares). Como ya se ha expresado, en la praxeología matemática el lenguaje es el vínculo entre las componentes praxémicas y discursivas y a la vez, el medio de comunicación entre el profesor y el estudiante. Nada puede ser explicado ni entendido si no se comprende el lenguaje utilizado. En el caso particular del aprendizaje y enseñanza de la matemática el tema adquiere una dimensión extraordinaria dado que el lenguaje de esta ciencia está conformado por distintos registros vinculados entre sí. Esto lleva a admitir un proceso dinámico de interrelación entre palabra y concepto por lo que tanto el alumno como el docente deberían saber con exactitud qué se quiere decir y qué es lo que el otro entiende al utilizar determinadas formas lingüísticas.

4.6 Los distintos registros del lenguaje matemático

> "El lenguaje matemático está constituido por la lengua y el habla matemática y se rige por los sistemas de principios y reglas fonológicos, simbólicos y gráficos, sintáctico, semántico y evocativo" (Goodenough, 1971: 159-163, en Serrano Gómez, 2005).

Saussure, mencionado por Benveniste (1977) distingue entre lengua y habla: la primera se refiere al sistema de signos institucionalizados (símbolos, gestos y gráficos); la segunda, al uso de la lengua en el contexto –en este caso matemático–, sea en forma oral o escrita.

Se ha adoptado, para el lenguaje matemático, la trilogía siguiente:



Conocer el lenguaje matemático no implica solamente centrarse en la coordinación de las palabras que expresan los conceptos (sintaxis) sino dominar el significado y naturaleza de dichos conceptos (semántica) dentro del contexto adecuado.

Tomemos un ejemplo para aclarar lo expresado: transcribo una definición, la de valor absoluto de un número real extraída de un texto clásico de Cálculo (Piskunov, 1969).

Un número real no negativo, que satisface las condiciones

$$\begin{cases} |x| = x \,;\ \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x \,;\ \text{si } x < 0 \end{cases}$$

recibe el nombre de valor absoluto (o módulo) del número real x y su notación es $|x|$.

Distinguimos en la definición, palabras (en castellano en este caso) y símbolos propios de la matemática. Separémolos:

LENGUAJE NATURAL	SÍMBOLOS
número real no negativo que satisface las condiciones	x $\quad x \geq 0$ $\quad x < 0$ $\quad \lvert x \rvert$

En primer lugar, si no sabés qué es un número real, ni hablar de entender la definición de su valor absoluto. Rescatemos el concepto.

Veamos: ¿Qué es un número real? Tal vez no recordés que reciben el nombre de reales aquellos números que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de puntos de una recta. Bueno… me conformo con que mencionés algunos.

Supongamos que pensaste en uno negativo, el cero y uno positivo. Por ejemplo: –4, 0 y 5

Al ubicarlos sobre la recta numérica, asociaste la condición de ser negativo, con la izquierda y la de ser positivo, con la derecha (con respecto al 0, se entiende). Cambiaste el registro en símbolos y en palabras por la representación gráfica. Representalos.

Pero en la definición precedente se utiliza la letra x. ¿A cuál de los tres números representa x?

A cada uno de ellos y al mismo tiempo, a los tres. Luego con x indicamos uno y cualquiera de los números reales. **x** es por lo tanto, una variable en este caso, real.

¿Cómo leés la expresión $x \geq 0$? Seguramente afirmaste que x es un número positivo o cero (puedes decir "x es no negativo"). Pasaste del registro simbólico al coloquial.

¿A cuáles de los números del ejemplo dado te estás refiriendo?

Bien, al 0 y al 5.

Traducí en palabras la expresión $x< 0$. El –4 del ejemplo dado es el número que satisface esta desigualdad.

¿Qué significa la "condición" $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$?

Si el número es positivo o cero (no negativo), entonces su valor absoluto es el mismo número. Pasamos nuevamente del registro simbólico al lenguaje coloquial. Expresamos en palabras una condición dada en símbolos.

En virtud de lo anterior: $|5| =$? (¿Cuál es el valor absoluto del número 5?)

Pasemos a la otra condición: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$. Para expresarlo con palabras debés saber que –x indica opuesto de x. ¿Cuándo dos números son opuestos? Este concepto debe ser "rescatado" de tu memoria a largo plazo. Hacelo.

Para que controlés: Dos números reales son opuestos cuando difieren sólo en su signo o bien: números opuestos son aquellos cuya suma es 0.

El opuesto de x se indica con –x.

Además, se utilizó el símbolo $\Rightarrow$ ¿Qué significa? ¿Por qué palabra puede reemplazarse? Es, efectivamente, el signo de implicación. Puede reemplazarse por entonces.

Si "tal cosa" entonces "tal otra". Nuevamente, del símbolo a la palabra.

$|-4|=$(¿Cuál es el valor absoluto del número –4?)

¿Podrías redactar una oración que definiera (sin utilizar símbolos, es decir, en lenguaje coloquial) el valor absoluto de un número real? Supongo que resultó algo así: el valor absoluto de cualquier número positivo o cero es el mismo número; si el número es negativo, su valor absoluto es el número opuesto.

¿Te das cuenta cómo cambiás de registro?

Vamos al registro gráfico y representá sobre la recta, x y –x.

¡Cuidado! –x no significa que el número sea negativo; sólo quiere decir “cambiado de signo”.

X 0 –X ¿Esto está bien? Sí. Es correcto: x es negativo

–X 0 X Acá, x es positivo.

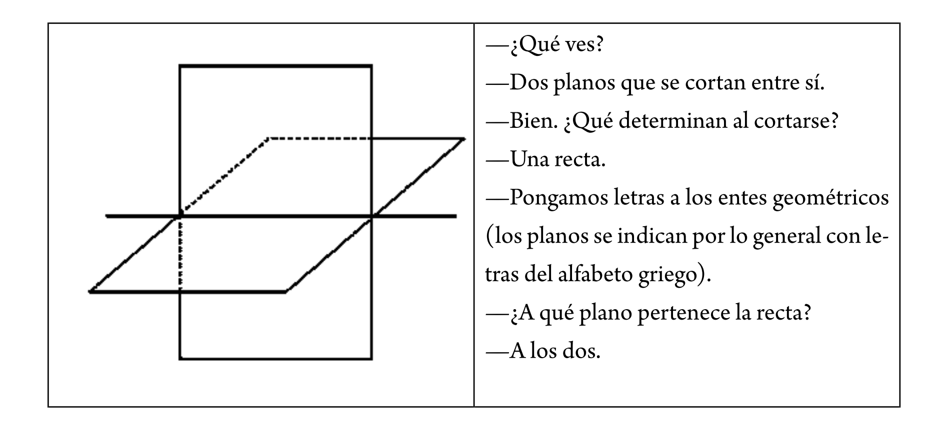
En matemática siempre estamos representándonos mentalmente objetos y expresándonos a través de palabras, símbolos y gráficos, pero no hay que confundir el objeto matemático con su representación simbólica o gráfica. No “ves” el número real pero lo “representás” por un punto de la recta. El número es un objeto mental (interno); el punto de la recta, un objeto visual (externo). El punto y la recta son entes geométricos y por lo tanto, abstractos; lo que dibujamos son sus representaciones.

Tal vez te preguntés: ¿para qué necesito tres registros distintos? Hay varias respuestas a este interesante interrogante pero te daré las que, a mi entender, son más fuertes:

a. por una cuestión de economía de tiempo y esfuerzo. $x \geq 0$es mucho más breve que la expresión “un número que puede ser positivo o cero”.

b. porque si el sistema de representación ha sido elegido y manejado de manera adecuada, la comprensión del contenido es más sencilla y la transferencia a otras situaciones, inmediata.

Observá el siguiente dibujo:


—¿Qué ves?
—Dos planos que se cortan entre sí.
—Bien. ¿Qué determinan al cortarse?
—Una recta.
—Pongamos letras a los entes geométricos (los planos se indican por lo general con letras del alfabeto griego).
—¿A qué plano pertenece la recta?
—A los dos.

El enunciado correspondiente a esta situación es el siguiente:

"Dos planos que se cortan (o interceptan) determinan una recta que pertenece a ambos".

Si se hubiera partido del enunciado y no del dibujo, el trabajo de comprensión hubiera sido más lento porque la representación gráfica inicial ya te "mostró" los planos. De lo contrario, deberías haberlos imaginado (hacer una imagen mental previa) y luego pensar en el corte e identificarlo con el objeto recta.

4.7 Vinculación entre los tres registros del lenguaje matemático

En los libros de texto los teoremas y propiedades comienzan por su enunciado y en el caso de los primeros, luego de ser demostrados, se agrega la interpretación geométrica (si la poseen); es decir, se relega en la presentación el aspecto intuitivo, tan importante para la construcción del conocimiento. El proceso de comprensión se ve favorecido con la alteración de este orden y éste es el trabajo que realiza el profesor durante la clase para facilitar el aprendizaje.

Tomemos un ejemplo: el teorema del valor medio (teorema de Lagrange), fundamental en los cursos de Análisis.

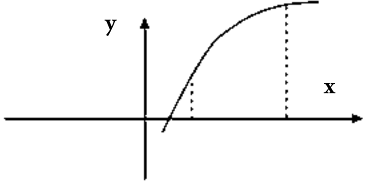
En el texto, antes de pasar al lenguaje simbólico, debería leerse: "La diferencia de valores que toma una función continua en un intervalo cerrado y derivable en el abierto, es igual al producto de la amplitud del intervalo por la derivada de la función en algún punto intermedio". En la mayoría de los libros, el enunciado se presenta así:

> Si $y = f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), existe al menos un punto c interior a $[a, b]$ tal que $f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$

Además de la particularización que se realiza al llamar con determinadas letras al intervalo y al punto ¿qué te puede decir ese enunciado si no "ves" los elementos involucrados en el mismo? Creo que nada. Entonces, lo memorizás y luego, al final, cuando te enfrentás con el dibujo en el texto, recién entendés de qué se trata.

Veamos qué ocurre si se presenta el teorema "al revés", es decir, partiendo de un gráfico. Puede ser éste:

¿Qué representa la curva dibujada?



—Una función de variable real (función escalar). Llamémosla, por ejemplo, f(x).

¿Se "corta" o "salta" la gráfica en el intervalo que se ha considerado?

—No.

Entonces es continua en ese intervalo cerrado. Sea el mismo, por ejemplo, [a, b]. ¿Presenta puntos angulosos la curva?

—No. Es "suave".

Ah, entonces es derivable (luego aclaramos por qué lo es en (a, b)). Si la función es derivable en ese intervalo abierto la curva admite recta tangente en cada uno de sus puntos (se han excluido los extremos ¿no?). Por lo tanto, admitimos que es derivable en (a, b).

Ahora escribí, en forma simbólica, empleando las letras utilizadas para nombrar los distintos elementos, las condiciones que satisface la función. Esto constituye la hipótesis.

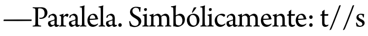
H) y = f(x) es continua en [a,b] y derivable en (a,b)

Completemos el dibujo.

¿Qué se ha trazado?

—La recta **s** que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) y una recta **t**.

¿Cómo es la recta t con respecto a la recta **s**?



—Paralela. Simbólicamente: t//s

¿Existe una sola paralela a la recta **s**, que sea tangente a la curva?

—En el caso de este dibujo, sí.

¿Y si cambiás la curva? Probá.

Por eso se dice "existe al menos una recta tangente a la curva, que es paralela a la secante trazada" lo que implica la existencia al menos de un punto como el **c**. El punto de tangencia es, en este caso, (c, f(c)). Pueden existir otros; esto depende del dibujo.

Ahora bien: si t//s (usamos simbología por economía) ⇒ (necesariamente) la pendiente de **s** es igual a la pendiente de **t**. Recurrimos al concepto de pendiente y a la noción de derivada en un punto que teníamos guardado en la memoria de largo plazo.

Lo anterior, en símbolos, se expresa como $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

de donde resulta: $\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)}$, que es la tesis del teorema y que podemos escribir con significado recién ahora.

El enunciado "surge" naturalmente en palabras (como el presentado al comienzo) porque ahora se trata de expresar lo comprendido. Además, podrás aplicarlo a otros gráficos, con otras letras, con curvas distintas, es decir, ¡tendrás el conocimiento acabado del teorema!

Espero que hayas comprendido el papel que desempeña el lenguaje (en sus tres registros) en el aprendizaje de la matemática: te permite construir significados. ¡Lástima que a veces represente un obstáculo para aprender!

4.8 Comprensión de un enunciado o consigna

Cuando te enfrentás con un problema, con frecuencia, la primera dificultad la constituye la comprensión del enunciado. Lo mismo sucede con las consignas.

Tomemos un ejemplo: "Usá el cálculo para demostrar que el extremo relativo de la función cuadrática $y = (x-p).(x-q)$ está situado a la mitad del camino entre sus x-intersecciones" ¡Qué tal!

Tratá de responder las siguientes preguntas:

- ¿Tenés claro qué es un extremo?
- ¿Qué indica el modificador "relativo"?
- ¿Recordás cuándo una función recibe el nombre de cuadrática?
- ¿Qué entendés por mitad del camino?
- ¿Qué son la x-intersecciones?

Si no conocés el significado de alguna de estas expresiones es obvio que no podés encarar el problema por sencillo que sea desde el punto de vista matemático. La interpretación del enunciado se logra gracias al lenguaje y de hecho, a los conocimientos previos.

Una vez recuperados los significados (tarea que te transfiero), el problema puede ser planteado de otra manera:

"Hallá la abscisa del vértice de la parábola de ecuación $y = (x-p)\,(x-q)$"

En primer lugar: la palabra vértice de una parábola la tenés asociada a extremo (sea máximo o mínimo); segundo: sabés que el vértice está sobre el eje de la parábola (trazado por el punto medio del segmento determinado por los ceros de la función cuadrática dada); tercero: sabés que los ceros son los puntos de intersección de la gráfica con el eje de abscisas (x) –que existen ya que se habla de x-intersecciones–, entonces: leé nuevamente el

primer enunciado y decime: ¿es difícil? Sólo hay que detenerse a pensar interpretando (de hecho) cada una de las expresiones vertidas.

Cómo proceder para entender un enunciado o consigna:

- Realizamos una primera lectura del texto.
- Subrayamos aquellos términos cuyo significado no nos resulte inmediato y nos detenemos en ellos buscándolos en nuestra memoria semántica; si los desconocemos, recurrimos al diccionario o a la bibliografía recomendada por el docente.
- Separamos, con distintos colores o trazos, lo que se nos informa de los que se nos pregunta o pide que hagamos.
- Realizamos, si corresponde, un dibujo para ubicar los datos.
- Releemos el escrito para asegurarnos de que hemos comprendido de qué se trata.
- Expresamos el enunciado con nuestras propias palabras, alterando el orden de la oración, si es necesario para afirmar la comprensión.

4.9 Simbología matemática

¿Recordás que cuando hablamos del lenguaje de la matemática hicimos referencia a tres registros: el coloquial, el simbólico y el gráfico?

El lenguaje de la matemática es un lenguaje formalizado (artificial, podríamos decir) y que a diferencia del lenguaje natural (que es el que utilizamos para comunicarnos con quienes hablan la misma lengua que nosotros) incluye símbolos, fórmulas, palabras, oraciones, reglas de operación y de sintaxis rigurosamente definidos.

Cada ciencia posee su propio lenguaje, que le permite "significar" aquello que dicen, de un modo inequívoco. Para leer un escrito científico es necesario conocer el código: las palabras y expresiones definidas de acuerdo con significados precisos y en un contexto determinado. Obviamente, a mayor nivel científico corresponde una formalización más elevada; aumenta el rigor.

Los signos adquieren una significación especial. Por ejemplo, ¿qué indica el signo (!) colocado después de una frase? Ejemplo: ¡Qué hermoso!

Admiración, por supuesto y tiene que haber sido abierto antes.

¿Y ahora? 5! El signo (!) se formalizó matemáticamente: indica factorial del número cinco que es el producto 5.4.3.2.1= 120

En general $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) \ldots 2.1$ es decir, el producto de n factores naturales consecutivos considerados en forma decreciente.

Para formalizar un lenguaje, en primer lugar hay que dominar el lenguaje natural ya que sobre él deben efectuarse los convenios.

Un lenguaje formalizado es el resultado de agregar al lenguaje natural símbolos y reglas específicas. El lenguaje lógico-matemático es un excelente modelo de formalización.

¿Qué es un símbolo? El DRAE define el símbolo como la "representación perceptible de la realidad en virtud de rasgos que se asocian con ésta por una convención socialmente aceptada". La acepción matemática expresa: "letra o figura que representa un número, variable o cualquier ente".

Vamos a aclarar esto. Con la afirmación "son representaciones perceptibles de la realidad" (aunque se refieran a entes abstractos) se quiere manifestar que son estímulos visuales: se ven.

Ejemplos: los símbolos Δ π Σ representan "algo" en determinado contexto. Un triángulo o la letra griega delta (mayúscula); el número irracional pi o la letra griega pi; una sumatoria o la sigma mayúscula del alfabeto griego.

"De acuerdo con una convención socialmente aceptada" significa admitida por la comunidad, en este caso, por la comunidad matemática.

> Los símbolos matemáticos "ocupan" el lugar de "algo" que no se ve porque es abstracto. Hay que tener en cuenta que los objetos matemáticos son ideales, "intangibles" y que para poder trabajar con ellos fue necesario recurrir a los símbolos.

En el ejemplo dado, sin hacer referencia al contexto en el cual van a actuar como sustitutos visibles de algo que no lo es, no se les puede atribuir un significado preciso. "Los símbolos deben ser entendidos como "posibles herramientas de razonabilidad", por ello, los alumnos deben apreciar "el poder de los símbolos" como medio para aceptar o rechazar una conjetura o argumento" (Marcipar Katz, 2000).

Pimm (1999) clasifica los símbolos en:

a. Logogramas: fueron inventados para hacer referencia a diversos conceptos. Ejemplo: +; –; =; >; < (adición, sustracción, igualdad, desigualdad).

b. Pictogramas: son figuras simplificadas de un objeto matemático.

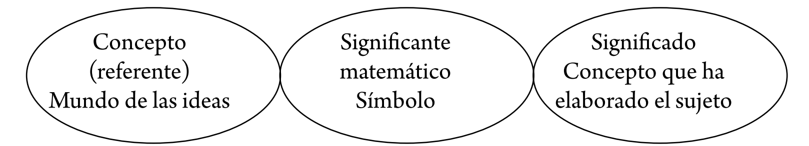
Ejemplos:



c. Símbolos de puntuación: han sido tomados de la ortografía pero poseen un significado especial según dónde se los coloque. Ejemplo: : ! () [] {}

d. Símbolos alfabéticos: son letras de los alfabetos latino o griego empleadas con distinto significado del que poseen en la lengua. Ejemplo: α π δ θ Ω (normalmente empleados para nombrar planos u operadores).

Reitero: siendo el símbolo una representación, está íntimamente relacionado con un significado, facilita la comprensión y permite elaborar y expresar un conocimiento. Algo más o menos así (si aceptamos que los entes tienen existencia fuera de nuestra mente es decir, con una concepción platónica):



Nuestra mente "capta" las ideas (aunque sea en forma incompleta); representa el concepto atendiendo a sus rasgos característicos por medio de un símbolo y elabora un concepto personal (significado) el cual deberá ser "ajustado" a lo que constituye un conocimiento institucionalizado.

Vamos a repasar el lenguaje de los símbolos matemáticos. He considerado los más utilizados en un curso básico de Cálculo. Podés consultar http://es.wikipedia.org/wiki/notación si querés completar las siguientes tablas. Sé que los conocés pero no está de más recordarlos.

Lógica de predicados

SÍMBOLO	NOMBRE	SE LEE	SE USA
$\forall$	Cuantificador universal	"para todo…"; "para cualquier…"	Anteponiéndolo a una variable:
$\exists$	Cuantificador existencial	"existe al menos un…"	Anteponiéndolo a una variable:

Observación: cuando afirmamos $\forall x : p$ debemos entender que para cada valor que tome x –por lo tanto para cualquiera y para todos los que pueda tomar– se cumple la proposición p. Cuando vemos escrito $\exists x$ debemos admitir que por lo menos existe un valor de x que satisface alguna determinada condición pero si se acepta que existe al menos uno, pueden existir infinitos (siempre dentro del campo de variabilidad de x).

Los símbolos anteriores suelen acompañarse de los siguientes:

SÍMBOLO	NOMBRE	SE LEE
:	reluz	"se cumple que"
/	barra	"tal que"

LÓGICA PROPOSICIONAL

SÍMBOLO	NOMBRE	SE LEE	SE USA
$\Rightarrow$	Implicación material o condicional	"implica"; "por lo tanto" "entonces"	Entre dos proposiciones Si $p_1 \Rightarrow p_2$
$\Leftrightarrow$	Bicondicional o implicación doble	"si y sólo si"	Entre dos proposiciones que se implican mutuamente $p_1 \Leftrightarrow p_2$ (si p_1 entonces p_2 y además, si p_2 entonces p_1).
$\wedge$	Conjunción lógica copulativa	"y"	Entre dos proposiciones $p_1 \wedge p_2$ (p_1 y p_2 se cumplen simultáneamente).
$\vee$	Disyunción lógica inclusiva	"o"	Entre dos proposiciones $p_1 \vee p_2$ (puede cumplirse una o la otra o ambas).
$\neg$	Negación lógica	"no"	Antepuesta a una proposición. $\neg p_1$ (niega a p_1).

TEORÍA DE CONJUNTOS

SÍMBOLO	NOMBRE	SE LEE	SE USA
{ }	Delimitador de conjunto	"el conjunto de"	Encerrando los elementos de un conjunto sea éste definido por extensión o por comprensión.
$\varnothing$	Conjunto vacío	"conjunto vacío" o "sin elementos"	Solo
$\in$	Símbolo de pertenencia	"pertenece a"	Entre un elemento y un conjunto $x \in C$.
$\notin$	No pertenencia	"no pertenece a"	Entre elemento y conjunto. $x \notin C$ Excluye a x del conjunto C
$\cup$	Unión	Unión	Entre dos conjuntos. $A \cup B$. Todos los elementos de A y todos los elementos de B (incluidos los comunes).

La tabla continúa en página siguiente »

SÍMBOLO	NOMBRE	SE LEE	SE USA
$\cap$	Intersección	Intersección	Entre dos conjuntos. $A \cap B$ Indica aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos.
$\subset$	Inclusión estricta	"está incluido en" "es subconjunto de"	Entre dos conjuntos. $A \subset B$. Indica que todos los elementos de A pertenecen a B pero existen elementos de B que no pertenecen a A.
$\subseteq$	Inclusión amplia	"está incluido ampliamente en"	Entre dos conjuntos. $A \subseteq B$. Todos los elementos de A pertenecen a B pero no existen elementos de B que no pertenezcan a A.

Conjuntos numéricos

SÍMBOLO	NOMBRE	HACE REFERENCIA A
N	Conjunto de los números naturales	$\{1,2,3,4,5,6,7,....\}$
N_0	Conjunto de los números naturales con el cero incluido	$\{0,1,2,3,4,5,6,....\}$
Z	Conjunto de los números enteros	$\{....-5,-4,-3,-2,-1,0, 1,2,3,4....\}$
Q	Conjunto de los números racionales	$\left\{\frac{p}{q} p, q \in Z;\ q \neq 0\right\}$
R	Conjunto de los números reales	$Q \cup \{\text{irracionales}\}$
C	Conjunto de los números complejos	$\{a + bi\ ;\ a,b \in R\}$

Los conjuntos de los números negativos, de los irracionales y de los imaginarios carecen de símbolo específico.

Orden

SÍMBOLO	SE LEE	SE USA
>	"mayor que"	Entre dos números. $a > b$
≥	"mayor que o igual a" "no menor que"	Entre dos números. $a \geq b$ Admite la posibilidad de que "a" sea igual a "b".
<	"menor que"	Entre dos números. $a < b$
≤	"menor que o igual a" "no mayor que"	Entre dos números. $a \leq b$ Admite la posibilidad de que "a" sea igual a "b".

Otros símbolos importantes

SÍMBOLO	NOMBRE	SIGNIFICADO
π	Pi	Razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro.
$\sum_a^b$	Sigma	Sumatoria de elementos desde "a" hasta "b".
∞	Infinito matemático	Lo que carece de medida (según Platón-Pitágoras) Lo inalcanzable (infinito absoluto)
e	Número e	Base de los logaritmos naturales o neperianos

Análisis matemático

SÍMBOLO	NOMBRE	SE USA	SIGNIFICA
D	Operador derivación	Antepuesto a una función. Df(x)	Derivada de la función f (es equivalente a f´(x))
∫	Signo de integral indefinida	Antepuesto a una expresión diferencial. $\int f(x)\,dx$	Familia de funciones primitivas de f(x) es decir conjunto de las funciones cuyas derivadas sean f(x)
$\int_a^b$	Signo de integral definida	Antepuesto a una expresión diferencial. $\int_a^b f(x)\,dx$	Un número real. Bajo ciertas condiciones, el área de una región.
∂	Signo de derivación parcial (Delta de Jacobi)	Antepuesto a la función que se quiere derivar, indicando con respecto $\frac{\partial f}{\partial x}$ a qué variable.	Que la función f depende de más de una variable y se la deriva respecto de alguna de ellas.
∇	Operador nabla (Operador hamiltoniano)	Antepuesto a una función. ∇f	Gradiente de un campo escalar. Vector cuyas componentes son las derivadas parciales evaluadas en un punto.

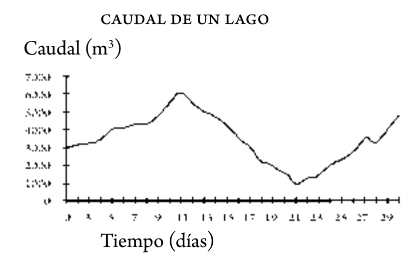
Finalmente, me agradaría que tengas en cuenta lo siguiente: para emplear de manera adecuada el lenguaje simbólico es necesario poseer dominio del aspecto conceptual de la matemática. Cuando hayas logrado comprensión y un correcto manejo de los símbolos, tendrás asegurada, en gran parte, la conquista del conocimiento matemático. Vale la pena esmerarse ¿no?

4.10 Lenguaje gráfico

Los distintos tipos de lenguaje de la matemática cooperan entre sí para que podamos atribuir el significado correcto a un concepto. Alguien dijo: "Un gráfico vale más que mil palabras" Yo agregaría: ¡si lo entendemos!

Basta hojear un diario, periódico o revista o mirar televisión para encontrarnos con cantidades de tablas, representación de funciones, diagramas de barras o sectores, histogramas o polígonos de frecuencias. La información está allí, en imágenes que de por sí resultan mucho más atractivas que una apretada masa de datos; las relaciones entre las variables involucradas son más claras cuando se "ven" pero hay que saber interpretarlas (cosa que no siempre sucede).

a. Éste es un gráfico cartesiano. Para interpretarlo es imprescindible saber:



- Qué variables se están relacionando.
- Cuál es la variable independiente y cuál se ha considerado dependiente.
- Qué unidades de medida se han adoptado para cada variable.
- Si existe continuidad o discontinuidad de la función.
- Qué tipo de crecimiento o decrecimiento experimenta la función en el intervalo considerado.
- Cuál es la tendencia de la magnitud representada.

Analizá el gráfico teniendo en cuenta los ítems de la derecha.

b. Cuando queremos aclarar un texto recurrimos a los diagramas, que son representaciones de la información de que se dispone, de manera sintética y concisa; muestran las relaciones entre las diferentes partes de un conjunto o sistema, de la forma más sencilla posible.

No existen reglas de formación e interpretación de los diagramas (Oostra, 2003) que aseguren su eficiencia, pero si se conocen los objetos involucrados y las propiedades que los vinculan, es posible que el diagrama que los represente resulte adecuado.

Resulta más fácil entender y memorizar la información recibida cuando ésta se organiza personalmente. Para hacerlo (Salvatecci, 2002) tené en cuenta que:

- es imprescindible la comprensión del tema antes de su organización en un diagrama;
- el punto de partida constituye el título;

- para plantear las ramificaciones hay que categorizar en importancia las distintas partes de la información;

- las conexiones deben guardar la lógica de los enunciados;

- hay que tratar de sintetizar en pocas palabras (o símbolos) los distintos aspectos del tema;

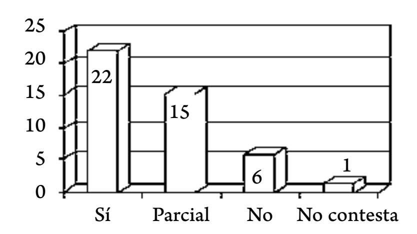
- a mayor profundización sobre el contenido corresponde una arborización más extensa.

c. Los gráficos de barras o poligonales constituyen una manera atractiva de presentar una información. A través de los distintos colores que se empleen, los datos se vivifican.

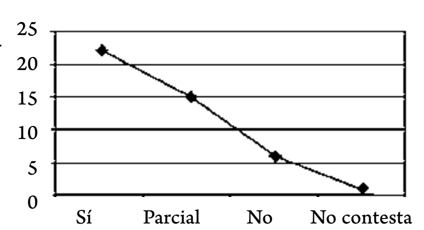
Al solo efecto de ilustrar lo dicho y partiendo de informaciones básicas ofrecidas en los informes de cátedra, te presento algunos gráficos elementales:

Éste corresponde a la pregunta formulada a 44 alumnos de determinada asignatura:

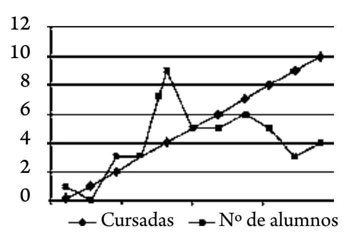
"¿Encontraste diferencia entre la forma de enseñar y la manera de evaluar en los exámenes parciales?"



La misma información pudo presentarse así:



Esta gráfica es un poquito más complicada. La línea recta indica cantidad de materias del plan de estudio cursadas por un grupo de alumnos al momento de inscribirse en una determinada asignatura.



El trazo poligonal se refiere a la cantidad de alumnos en cada situación. Observamos que 3 alumnos han cursado 2; 9 alumnos han cursado 4; 5 alumnos han cursado 5 asignaturas previamente, etc.

Analizá el gráfico y comprobá que lo has entendido.

4.11 Etimología matemática

Etimología quiere decir: "Origen de las palabras, de su existencia, de su significación y de su forma" (DRAE). ¿Por qué se introduce acá la etimología? Porque la considero muy importante dado que el desconocimiento de los vocablos adiciona una dificultad más a la comprensión de los conceptos. Cuando uno no sabe de dónde surge una palabra, se contenta con memorizarla y como es lógico, podemos olvidarla o confundir su significado.

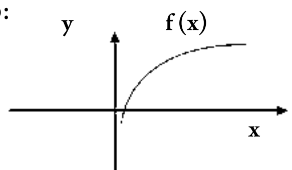
La mayoría de las palabras utilizadas en matemática deriva del latín o del griego y por eso nos resultan extrañas.

Este breve ítem no pretende ahondar en la etimología de todos los términos que jalonan el conocimiento matemático, lo que constituiría una tarea realmente ciclópea, sino rescatar aquellas palabras que se utilizan con frecuencia en los textos y en las clases.

Partamos de una situación concreta: dibujá una curva creciente y convexa en un sistema formado por dos ejes (abscisas y ordenadas).

> La convexidad es un concepto relativo: depende del lugar en el que se encuentra el observador. Convenimos en "mirar" la curva desde el eje y^+.

Seguramente dibujaste esto:



Pero estoy segura de que nunca te detuviste a pensar de dónde salen las palabras curva, creciente, convexa, abscisa y ordenada.

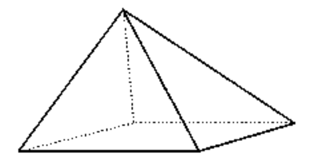
Bien: curva viene del griego hurtos que significa encorvado, doblado; creciente proviene del latín *crescere* (aumentar); convexa viene del latín *convexus* (llevar a cuestas); abscisa viene del latín *abscindere* (separar, cortar) y ordenada, del griego *orthia* (recto y hacia arriba) de manera que la consigna dada sería, en lenguaje natural: "dibujá un trazo doblado que indique que la función representada aumenta a medida que nos desplazamos hacia la derecha, en forma encorvada, en un sistema formado por una recta que divide al plano en dos semiplanos y otra perpendicular orientada hacia arriba"

Los términos específicos de la matemática simplifican las oraciones ¡cuando se conocen los significados de cada palabra utilizada!

Continuemos con la etimología.

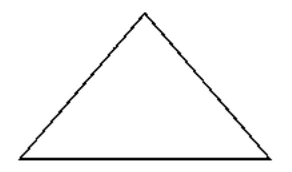
¿Por qué a esta figura se la llama pirámide?

Porque la palabra viene del griego *pyros* que significa fuego y su forma "recuerda" una pira (hoguera).

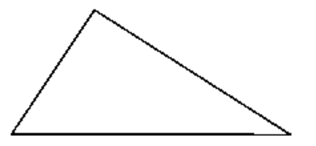


¿Qué significa isósceles?

El prefijo iso indica igual y la palabra griega *skelos,* pierna. Significa "de piernas iguales" ya que dos de los lados del triángulo, en este caso son iguales.



Escaleno proviene de *skalenon* (derivado de scazo) que informa que renguea, que tiene las piernas desiguales. ¿Te das cuenta? Todo tiene sentido.



El conocimiento de los prefijos, en matemática, es imprescindible. Los siguientes forman parte de las numerosas palabras que empleamos a diario. Buscá un ejemplo para cada uno aunque no pertenezcan al campo de la matemática.

PREFIJO	INDICA	PREFIJO	INDICA
ad	proximidad	hipo	debajo
ab/ abs	separación	inter	entre/en medio
ante	delante de	intra	dentro
anti	contra	multi	numeroso
bi/bis	doble	octa	ocho
circum	alrededor	omni	que abarca todo
co/con/com	unión, colaboración	para	junto o contra
cuadri/cuatri	cuatro	pen	casi
deci	diez	peri	alrededor
di/dis	se opone	pre	antecede
emi	medio	quincu	cinco
endo	internamente	retro	hacia atrás
epi	sobre	sim	con
eu	bien	sub	bajo
exo	fuera	trans	más allá
extra	que rebasa	tri	tres
hiper	exceso	yuxta	junto a

4.12 Descubrimiento de palabras del acervo matemático a partir de su etimología

Te propongo algo entretenido: en la primera columna de la tabla siguiente te doy la expresión en su idioma de origen –que se consigna en la segunda columna–; en la tercera, su significado.



Tenés que pensar y escribir en la cuarta columna, la palabra que represente al concepto u objeto matemático en cada caso. ¡No mirés las respuestas antes de pensar!

EXPRESIÓN	IDIOMA	SIGNIFICADO	CONCEPTO U OBJETO
adjacere (jacere-ad)	latín	Estar al lado de	
Apotemeus	griego	Dardo. Cortadura	
asumptolos	griego	Sin encuentro	
Alter	latín	Uno y otro/ a uno y otro lado	
bis+nomê	griego	Compuesto por dos partes	
feros+circum	latín	Que lleva alrededor	
Konos	griego	Piña	
constan-tis	latín	Lo que permanece invariable	
con-vexus	latín	Llevar a cuestas, encorvado.	
cuspis-dis	latín	La punta	
Monstrare	latín	Hacer ver	
dia+gonia	griego	Por el medio+ángulo	
duo+edra	griego	Dos + caras	
dys+stasis	griego	Espacio entre lugares	
Aequatio	latín	Igualar	
Axis	latín	Cierta recta	
Sphaira	griego	Globo-redondo	
Exponere	latín	Señalar. Indicar	
Finis	latín	Lo que tiene fin	
Uperbola	griego	Arrojar sobre	
upoteinousau	griego	Subtender, sostener	

La tabla continúa en página siguiente »

EXPRESIÓN	IDIOMA	SIGNIFICADO	CONCEPTO U OBJETO
in+cognoscere	latín	No conocido	
Upotesis	griego	Fundamento, suposición	
iso+skelos	griego	De piernas iguales	
Limen	griego	Umbral, puerta	
logos+arithmos	griego	Relación entre números	
mono+nomê	griego	Una sola parte	
multus+plous	latín	Muchas veces mayor	
para + ballo	griego	Arrojar	
Paralellos+epipedon	griego	Paralelos + superficies	
Radix	griego	Principio, origen	
Regula	latín	Norma	

Controlá los términos "descubiertos" con los que figuran a continuación.

Adyacente-apotema-asíntota-alterno-binomio-circunferencia-cono-constante-convexo-cúspide-demostrar-diagonal-diedro-distancia-ecuación-eje-esfera-exponente-finito-hipérbola-hipotenusa-incógnita-hipótesis-isósceles-límite-logaritmo-monomio-múltiplo-parábola-paralelepípedo-raíz-regla.



SÍNTESIS

¿Comprendés ahora la importancia del lenguaje?

Como no somos máquinas no basta con los símbolos para hacernos comprender por los demás, pero tampoco es suficiente, en la ciencia, expresar los conceptos solo con la palabra. El conocimiento matemático involucra ambos aspectos y exige su dominio.

Este capítulo trata de la relación entre los tres registros del lenguaje matemático: el coloquial, el simbólico y el gráfico.

¡Es realmente impresionante verificar que sabemos con certeza lo que los términos encierran! La etimología nos facilita la comprensión. Por eso me pareció importante incluir algunas palabras del acervo matemático para desafiar tu curiosidad. La idea es que el tema te atrape e investigués por tu cuenta.

Por otro lado, el lenguaje gráfico, ensamblado con lo anterior –a través de diagramas, esquemas, barras, sectores, poligonales, tortas o burbujas– te permite sintetizar, ordenar los contenidos para comprender y mostrar de manera amigable determinada información.

Capítulo 5

Operaciones gráficas básicas

El aprendizaje de la matemática exige el dominio del lenguaje gráfico, su interpretación cuantitativa, para poder operar y su interpretación cualitativa para encontrar significados según los contextos representados.

Si no somos capaces de graficar objetos geométricos difícilmente podamos construir conocimientos sobre ellos, lograr un aceptable desarrollo de competencias y efectuar transferencias a los distintos campos de aplicación de la matemática.

La incorporación de elementos visuales facilita la comprensión de los conceptos y el pasaje de un registro del lenguaje, a otro. El estudio del análisis matemático, de suma importancia en la ciencia, exige la adquisición del lenguaje gráfico vinculado con el álgebra, la geometría y la trigonometría. Este requisito lo hace complejo para muchos estudiantes, sobre todo para quienes no culminan la escuela secundaria con una preparación satisfactoria.

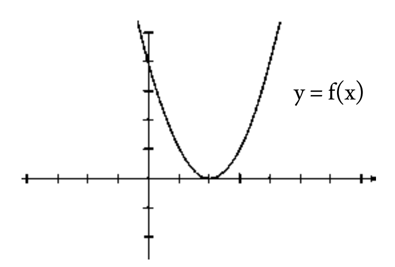
El propósito de este capítulo es que encontrés en él, cuestiones que te permitan afianzar algunos conocimientos básicos a partir de la revisión de las operaciones gráficas más sencillas.

5.1 Operaciones gráficas elementales

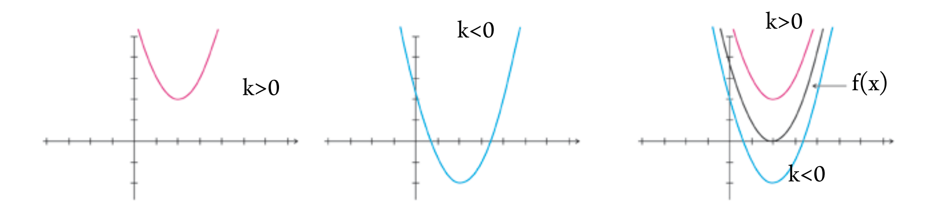
¿Sabés representar rectas y parábolas? Esto es fundamental porque a partir de sus gráficas podrás, mediante traslaciones y reflexiones, configurar conocimientos estructurados que incluyen la paridad o imparidad de una función, la inversión y la reciprocidad de funciones –entre otras cosas.

5.1.1 Traslación de una gráfica

Llamemos $y = f(x)$ a una función cualquiera (por ejemplo, a una cuadrática, representada gráficamente por una parábola).



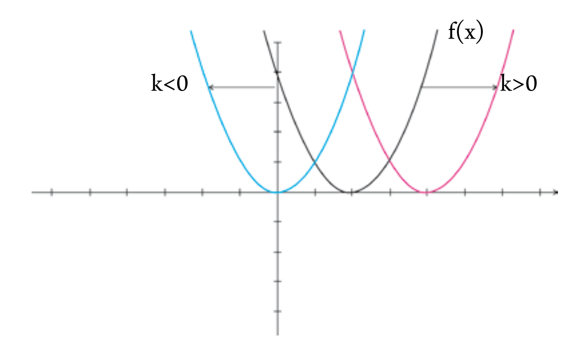
Expresamos con $y = f(x) + k$ a la función original aumentada en una constante k, siendo k un número real. Gráficamente, k indica un desplazamiento vertical de la curva ya que cada una de las ordenadas de sus puntos ha sido incrementada en k unidades.



Obviamente, si $k=0$, la gráfica "se queda" donde estaba (el vértice es, en este caso, un punto del eje de abscisas). Lo importante es asociar el signo de k con el sentido del desplazamiento: $k>0$ indica hacia "arriba"; $k<0$ indica hacia "abajo". La referencia es el eje x.

- Representá en un mismo sistema de ejes coordenados las rectas $y = x$, $y = x+2$, $y = x-3$ empleando el criterio de desplazamiento vertical.

Propongamos ahora $y = f(x - k)$. En este caso, la variable x se ha disminuido en k unidades (debés tener en cuenta que cuando k es un número negativo la diferencia dentro del paréntesis se transforma en una suma). La curva se desplaza lateralmente: $k > 0$ indica hacia la "derecha"; $k < 0$ indica hacia la "izquierda". Los estudiantes, por lo general, adjudican el signo –(que separa los términos dentro del paréntesis) al número k y ¡se equivocan al desplazar la curva!



Observá que en este caso el vértice de la parábola sigue siendo un punto del eje x.

- Representá $y = (x-2)^2$ e $y = (x+3)^2$ y cotejá las gráficas con la de $y = x^2$

$y = f(x) + k$ e $y = f(x+k)$ son funciones distintas: en el primer caso, la función afecta solo a la variable x y se "lee" efe de equis, más k lo que indica que a cada ordenada de la curva que representa a f(x) se le han sumado o restado –según el signo de k– un número determinado de unidades ; en el segundo caso, la función afecta a la variable incrementada en k unidades y se "lee" efe , de equis incrementada en k. ¿Te fijaste en la coma que coloqué después de la palabra efe? Compará esta última expresión con la anterior. ¿Notás la diferencia?

Completá el siguiente cuadro teniendo en cuenta el tema de las comas:

EXPRESIÓN COLOQUIAL	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
y es igual al cuadrado de **x**, más 3	
	$y = (x+3)^2$
y es igual al cubo, de equis disminuida en 3	
	$y = x^3 - 3$

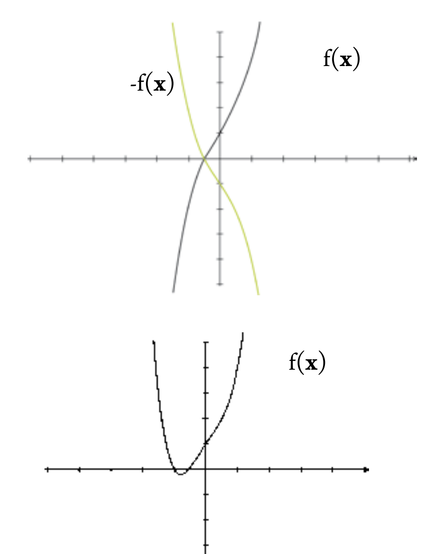
5.1.2 Reflexión de una gráfica

La palabra reflexión indica que se trata de encontrar la imagen especular (igual a la obtenida por un espejo) de una curva dada. Ésta se refleja sobre el otro semiplano (ya sea considerando el eje x, el y, o la recta de ecuación y = x) de manera que doblando la hoja a lo largo de una de estas rectas, las gráficas (original y reflejada) deben coincidir.

Obviamente, se puede reflejar una gráfica considerando cualquier recta pero atenderemos sólo los siguientes casos:

b.1. Con respecto al eje x

Dada $y = f(x)$ definimos $\text{Ref. } f(x)x = -f(x)$ Leemos el primer miembro de la igualdad como reflejada de la función f(x) con respecto al eje x; el segundo miembro indica la función opuesta de f(x).

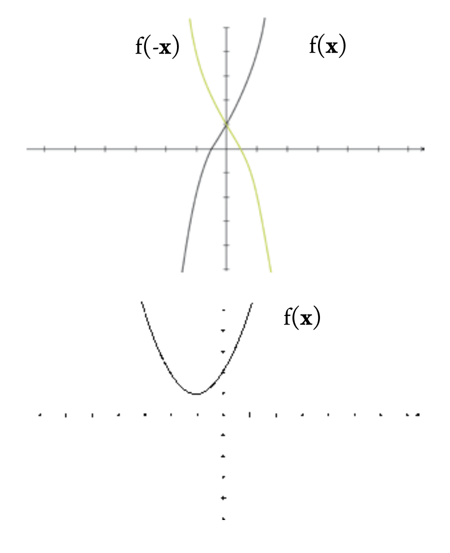


El trazo de la gráfica que se encontraba en el semiplano superior "baja" simétricamente con respecto al eje de abscisas; el trazo del semiplano inferior, sube.

- Para ejercitar esta operación dibujá Ref.$f(x)_x$

b.2. Con respecto al eje **y**

Dada y = f(x) Ref.$f(x)_y = f(-x)$



En este caso, la rama de la curva que se encontraba a la derecha del eje **y**, "pasa" al lado izquierdo y viceversa. El segundo miembro de la igualdad precedente corresponde a la función del valor opuesto del argumento.

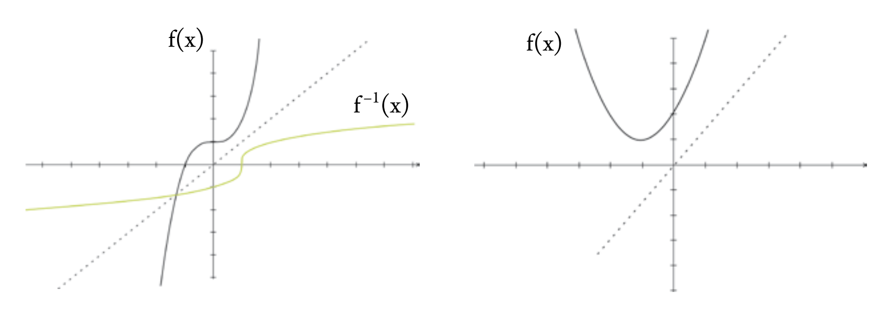
- Hallá la Ref. $f(x)_y$

b.3. Con respecto a la recta y = x

Dada y = f(x) Ref.f(x)y=x = $f^{-1}(x)$ Aclaremos que con $f^{-1}(x)$ indicamos función inversa de f(x). (No confundir con la recíproca en cuyo caso hubiéramos escrito $[f(x)]^{-1}$

En este caso efectuamos la reflexión con respecto a la recta bisectriz de primero y tercer cuadrantes, de ecuación $y = x$.

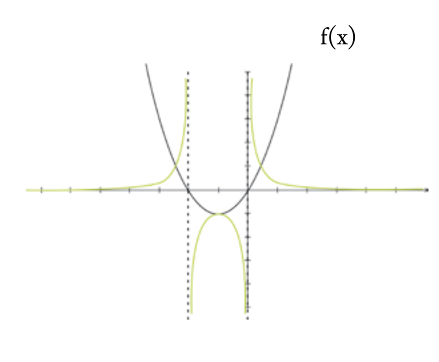
Halla la curva simétrica de $f(x)$.



ATENCIÓN: la curva que hallaste no corresponde a una función ¿Por qué?

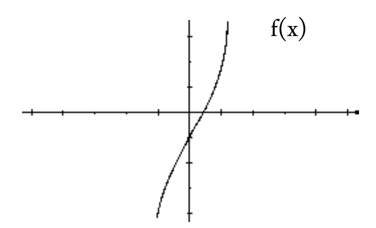
5.2 Reciprocidad

Dada $y = f(x)$ definimos la función recíproca así: Rec. $f(x)= \dfrac{1}{f(x)}$ función que existe siempre que $f(x)\neq 0$



- La función recíproca de $y = f(x)$ presenta asíntotas verticales. Éstas pasan por los valores de x que anulan la función dada.
- Si $f(x)$ decrece, $\dfrac{1}{f(x)}$ crece.
- Si $f(x)$ crece, $\dfrac{1}{f(x)}$ decrece.
- Si $f(x)\to\infty$, $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$
- Si $f(x)\to 0$, $\dfrac{1}{f(x)}\to\infty$

- Dibujá la recíproca de la función graficada a continuación y efectuá el análisis del crecimiento y el decrecimiento de ambas.

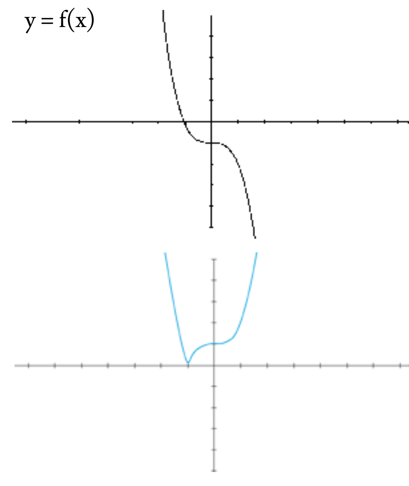


5.3 Valor absoluto

$y = |f(x)|$ o bien $y = \text{Abs}[f(x)]$

Dado que el valor absoluto de un número solo puede ser positivo o cero, todo trozo de la f(x) que esté en el semiplano inferior con respecto al eje x, se refleja y "pasa" al semiplano superior.

Fíjate en la siguiente gráfica. Corresponde a la función $y = -x^3 - 1$ que toma valores positivos, negativos y cero.



La función Valor Absoluto aplicada a f(x) "transforma" todos los valores negativos en positivos mientras que las ordenadas positivas o nulas permanecen invariables.

- Observá la gráfica que sigue e imaginala superpuesta a la original.

- Representá la función $y = x^2 - 3$ y en el mismo sistema de ejes $y = \text{Abs}(x^2 - 3)$

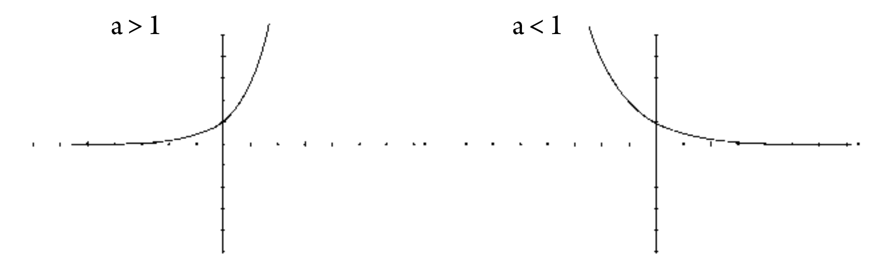
Recordá que Abs puede reemplazarse por las barras que encierran la función. $y = |(x^2 - 3)|$

Las operaciones gráficas vistas, junto con las representaciones de algunas funciones trascendentes (que se muestran a continuación) te permitirán graficar con solvencia muchas de las funciones que se emplean con frecuencia en un curso elemental de Cálculo.

5.4 Funciones trascendentes

5.4.1 Exponencial

$$y = a^x \quad \text{con} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$



La exponencial de base mayor que uno es estrictamente creciente, asintótica al semieje negativo de abscisas y cóncava hacia arriba; la exponencial de base menor que uno es estrictamente decreciente, asintótica al semieje positivo de abscisas y también cóncava hacia arriba. Ambas tienen por dominio el conjunto $\Re$ y por recorrido el $\Re^+$(no toman valores negativos).

5.4.2 Función logarítmica

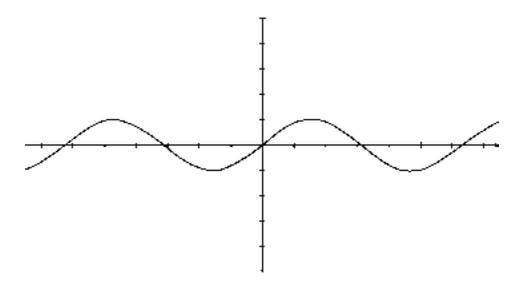
Siendo la función logarítmica la inversa de la exponencial, a partir de los dibujos anteriores y recordando que las gráficas de dos funciones inversas son simétricas con respecto a la recta y = x, hallá las gráficas de:

$y = \log_a x$ para $a>1$ y para $a<1$

Analizá en cada caso: dominio, recorrido, asíntotas, crecimiento o decrecimiento, concavidad o convexidad.

5.4.3 Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas

Comencemos con y = sen x



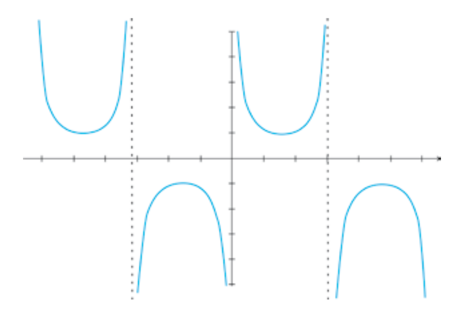
Los valores de la función están acotados.

$-1 \leq \text{sen}\,(x) \leq 1$

El dominio de la función seno es el conjunto de los números reales.

Apliquemos reciprocidad para hallar $\text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$

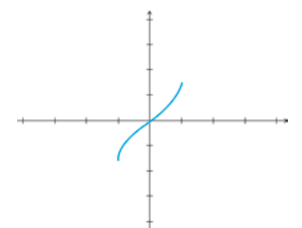
(teniendo en cuenta que para aquellos valores de la variable para los cuales el seno se anule, no existirá la función cosecante).



Compará esta gráfica con la del seno. Cuando éste crece, la cosecante decrece; cuando el seno disminuye, la cosecante aumenta su valor.

Las asíntotas de la cosecante corresponden a los ceros de la función seno.

Ahora pasemos a la función inversa del seno. Se indica con arcsen x (arco o ángulo cuyo seno es x) o bien $\text{sen}^{-1} x$. La gráfica se encuentra por simetría de la del seno, con respecto a la recta $y = x$



Recordá que hemos tenido que acotar el conjunto de valores sobre el eje y para que la gráfica corresponda a una función.

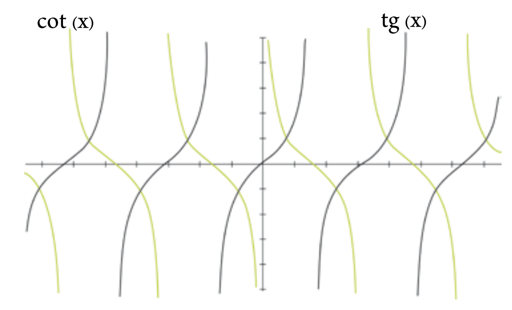
$$\frac{-\pi}{2} \leq \text{arcsen}\,(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

El dominio de arcsen es el intervalo real $[-1,1]$ ¿Cuál es su recorrido?



Dibujá la gráfica de la función $y = \cos x$ Encontrá la recíproca de la función coseno $(y = \sec x)$ y la inversa $(y = \cos^{-1} x)$ por métodos gráficos. Ah… y además, hacé los comentarios acerca de las características de las curvas halladas.

Para que el trabajo quede completo y te resulte útil, agrego la tangente y su recíproca (y te dejo la función inversa) ¿De acuerdo?



La recíproca de la función tangente es la cotangente. Como ya se dijo, los ceros de una corresponden a los puntos por donde pasan las asíntotas verticales de la otra. Trazalas.

La tangente es una función estrictamente creciente; la cotangente, estrictamente decreciente. El recorrido de ambas es el conjunto de los números

reales; los dominios se hallan excluyendo del conjunto de los números reales aquellos valores que corresponden a las respectivas asíntotas:

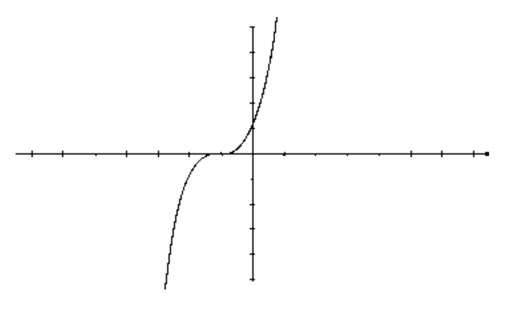
$$D_{tangente} = \left\{ R - (2n-1)\,\frac{\pi}{2} \right\} \qquad D_{cotangente} = ¿?$$

5.4.4 Graficando algunas funciones

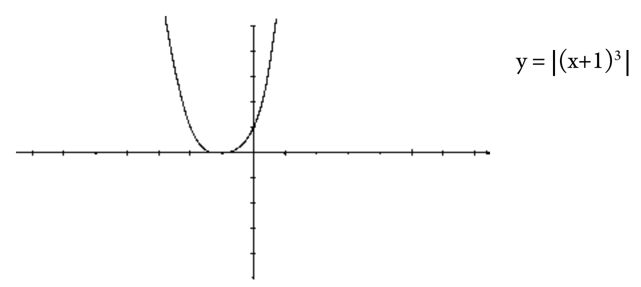
a) $y = \ln \left|(x+1)^3\right|$ ¿Por dónde empezamos?

Grafiquemos en primer lugar la parábola cúbica $y = (x+1)^3$

La misma corta al eje x en el punto −1 y al eje y, en 1. Es cóncava hacia abajo en el intervalo (-∞, −1) y hacia arriba en el (−1, ∞)



Consideremos ahora el valor absoluto de la función anterior. Recordá que los valores positivos o cero de la función se conservan, mientras que los negativos se transforman en positivos. La gráfica resultante es ésta:



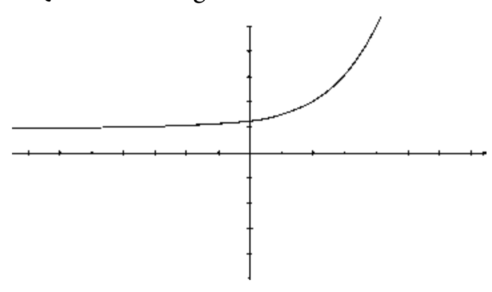
$y = \left|(x+1)^3\right|$

Pasemos a la función $\ln \left|(x+1)^3\right|$. El ln del número 0 no existe por lo tanto por el punto x= −1 pasa la asíntota vertical; los valores de la función que son menores que 1 poseen logaritmo negativo; los mayores que 1, positivos; el ln 1 es 0.

Finalmente, la gráfica de $y = \ln \left|(x+1)^3\right|$ tiene el siguiente aspecto:

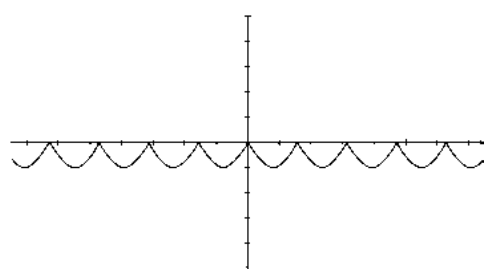
Como ves, no es difícil. Probá representando la función $y=2^{x-2}+1$ de acuerdo con lo expresado cuando repasamos el tema de la traslación de gráficas.

¿Obtuviste algo así?



Probá con ésta: $y = -|sen2x|$ El argumento del seno es ahora (2x). Representá sen(2x); considerá luego el valor absoluto de dicha función; por último, encontrá la gráfica de la función opuesta. ¿Resultado?

Lindo ¿no?





SÍNTESIS

Uno de los aspectos del lenguaje matemático es el gráfico. La experiencia me indica que un breve repaso de las operaciones gráficas elementales no es superfluo para quienes han encontrado dificultades en su camino hacia el conocimiento matemático.

Los desplazamientos verticales y laterales de las curvas que representan las funciones y las simetrías de las mismas con respecto a los ejes coordenados o a la bisectriz de primer y tercer cuadrante permiten dibujar con solvencia cuando se entiende qué es lo que expresa una determinada relación algebraica.

Se efectuó el tratamiento del valor absoluto de una función combinando la definición de valor absoluto con su interpretación gráfica para hacerla más comprensible.

Finalmente se consideraron algunas funciones trascendentes (las más empleadas comúnmente) haciendo surgir de sus representaciones, las funciones recíprocas y las inversas.

Capítulo 6

El estudio de la Matemática: qué, cómo, cuándo y dónde

Profesora: he estudiado esta asignatura hasta el cansancio; he resuelto los ejercicios de las guías cientos de veces y ¡nada! ¡No la puedo aprobar!
Un alumno angustiado

Bueno, bueno… Analicemos lo que afirmás, alumno angustiado:

— ¿Creés que es necesario estudiar "hasta el cansancio"?

— ¿Suponés que la repetición de los ejercicios de las guías constituye una manera adecuada de aprender?

— ¿Tu meta es el conocimiento o la aprobación de la asignatura?

Tu expresión indica algo así como abatimiento, depresión, tensión. Tenés que desprenderte de estas sensaciones porque no ayudan a aprender: bloquean tu capacidad de razonamiento, te limitan. Así como no se debe estudiar cansado, tampoco el estudio debe llevarnos al cansancio. Todo es cuestión de organización y autorregulación.

Repetir la resolución de los ejercicios propuestos en las guías no asegura de ninguna manera un aprendizaje comprensivo. La reiteración indicaría que te proponés memorizarlos y ése no es el camino. Una vez comprendidos los problemas propuestos podrás resolver otros empleando recursos previamente utilizados e internalizados pero debés tener en cuenta que resolver una cantidad considerable de ejercicios es beneficioso ¡siempre que sean distintos!…

La tercera pregunta es la más importante ya que te pone de cara al objetivo final de tu esfuerzo. ¿Qué te propones: aprender o simplemente aprobar la materia?

Si has optado por lo último, es probable que tu esfuerzo haya estado puesto en la memorización de definiciones y mecanismos a través de la repetición ("hasta el cansancio") pero no habrás capitalizado nada.

La meta debe ser aprender, es decir, lograr construcciones sucesivas a partir de la motivación intrínseca, de la afectividad, de la posibilidad de comunicación (que incluye la capacidad lingüística) y de la facilidad que poseas para lograr representaciones mentales. Obviamente, lleva tiempo, pero vale la pena invertirlo.

Si no has logrado aprender la asignatura, es posible que el problema radique en la forma en que "estudiás", ya que voluntad has tenido –según se desprende de tu afirmación–. Puede ser que tu manera de encarar el estudio de la matemática no sea la adecuada. Para decirlo sin eufemismos: es probable que no sepas estudiar matemática, que no hayas encontrado el canal propicio para aprenderla.

No creo necesario abundar en consideraciones acerca de las numerosas teorías de aprendizaje existentes –lo que excedería mi propósito– pero sí mencionar que tanto las teorías de procesamiento de la información (Ausubel) como las teorías constructivistas (Piaget, Vigostky) destacan la importancia que tienen en el aprendizaje, los conocimientos previos.

Dicen que entre un periodista y Albert Einstein se desarrolló el siguiente diálogo:

Periodista: ¿me puede explicar la ley de la relatividad?

A. E: ¿Me puede explicar Ud. como se fríe un huevo?

Periodista: Pues, sí. Sí que puedo.

A. E: Bueno, pues hágalo, pero imaginando que yo no sé lo que es un huevo ni una sartén ni el aceite ni el fuego.

Creo que estas palabras resumen todo lo que desearía decirte acerca de los conocimientos previos. Espero que la genialidad de Einstein logre convencerte de que no es posible construir conocimientos si no se dispone de una base sólida. ¿Cómo podríamos llegar a entender lo que es un campo escalar, su profundidad, su extensión si no hubiéramos aprendido qué es una función escalar, su dominio y su imagen; o una derivada parcial, si no tuviéramos los conocimientos anteriores de campo escalar y técnicas de derivación; o una serie numérica, si careciéramos del concepto de sucesión; o una integral definida si nunca hubiéramos hablado de partición de un intervalo, de sucesiones monótonas contiguas, de límites de las sumatorias?

Para implicarte en el aprendizaje debés, en primer lugar, "querer aprender" ya que si no percibís la matemática como algo significativo en tu vida, seguramente decidirás que no vale la pena aprenderla y los esfuerzos realizados desde "el exterior" resultarán estériles.

El aprender conlleva un compromiso personal y voluntario tendiente a la adquisición de un saber que te permita interpretar, plantear y resolver los problemas que se te presenten.

La memorización te permite retener lo que previamente has comprendido: los símbolos matemáticos y lógicos, las fórmulas elementales, los procedimientos y propiedades, los artificios algebraicos requeridos para efectuar

las demostraciones… pero el conocimiento matemático implica establecer relaciones entre ellos, articularlos. Esto último no es "trabajo" de la memoria: los teoremas deben deducirse a partir de sus hipótesis; las propiedades deben inferirse por medio de ejemplos; los conceptos deben elaborarse a través de conexiones con lo sabido.

¿Qué importancia tendría que repitieras, por ejemplo, que la mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos equidistantes de los extremos del mismo si no conocieras la diferencia conceptual entre recta y segmento, no supieras qué significa equidistantes y fueras incapaz de trazar la mediatriz? Si lo recordado carece de significatividad, pierde su valor.

6.1 Qué debés aprender

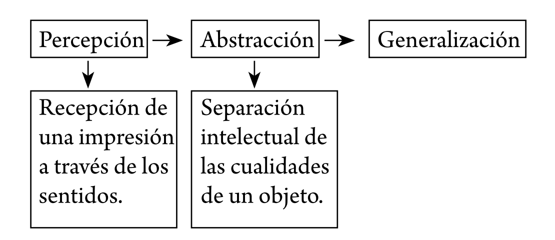
Vayamos a algunas de las distintas cuestiones que se presentan en el aprendizaje de la matemática: conceptos, propiedades, teoremas y resolución de problemas.

Para poner en claro mi punto de vista respecto de lo que considero una manera adecuada (y no la única, por supuesto) de encarar el estudio de los aspectos antes consignados he considerado ejemplos puntuales correspondientes al amplio espectro del análisis matemático ya que un enfoque "en abstracto" no resultaría, a mi entender, esclarecedor.

6.1.1 Conceptos. Definiciones

No es fácil definir qué se entiende por concepto. Adhiero a la concepción de Leibniz y Descartes que lo consideran una estructura dentro de la mente.

¿Cómo se forma un concepto? Existe una controversia histórica respecto de la generación de un concepto. Los filósofos partidarios del innatismo (Platón, Chomsky) afirman que los conceptos se "traen" en la mente; para los que suscriben al empirismo (Locke, Hume), son adquiridos a través de la experiencia proporcionada por los sentidos. Según Lovell (1986), la secuencia para el desarrollo de un concepto es la siguiente:



En esta postura, el concepto resulta ser una generalización realizada por la mente sobre datos que están relacionados. La formación del concepto resulta, por lo tanto, producto de una actividad del cerebro: el razonamiento.

Un concepto precisa ser definido y definir es establecer, mediante una proposición (unidad lingüística con sujeto y predicado), las características del objeto, para lo cual es necesario recurrir a otros conceptos elaborados con anterioridad. El significado de lo que se está definiendo está unido a los significados de los conceptos previos involucrados. Una vez comprendidos pueden ser expresados mediante palabras y vertidos al lenguaje simbólico sin mayores dificultades (en la medida que dominés los significantes).

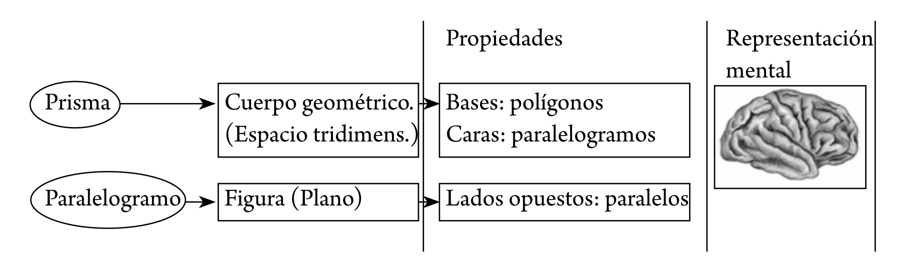
El conocimiento matemático a veces resulta difícil porque exige la adquisición de conceptos abstractos cuya gestación no se apoya en los sentidos: no los podemos ver ni tocar ni oír por lo que tenemos que elaborar representaciones mentales de ellos, imaginarlos. El conjunto de todas las representaciones que guardamos en la mente constituye nuestro léxico mental (Thagard, 2008) y cuanto más profuso éste sea, en mejores condiciones estaremos para discernir y luego generalizar.

Veamos de qué manera puede elaborarse la siguiente definición: Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos.

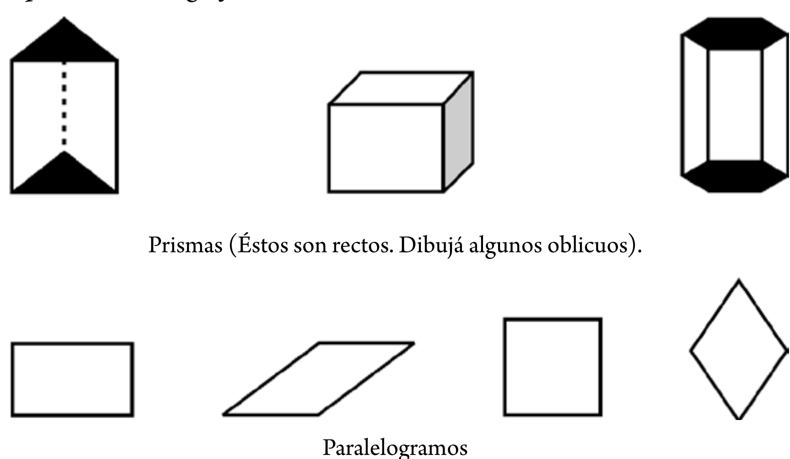
¿Creés posible comprender qué es un paralelepípedo (independientemente de la dificultad lingüística del término) si no sabés qué es un prisma o un paralelogramo? Estos conceptos deben preceder al de paralelepípedo; deben estar en nuestra mente. Las palabras prisma y paralelogramo tienen que estar vinculadas con sus imágenes mentales las que, seguramente, fueron creadas a partir de percepciones visuales anteriores.

Elaboración del concepto

a. Percepción



Representaciones gráficas



Prismas (Éstos son rectos. Dibujá algunos oblicuos).

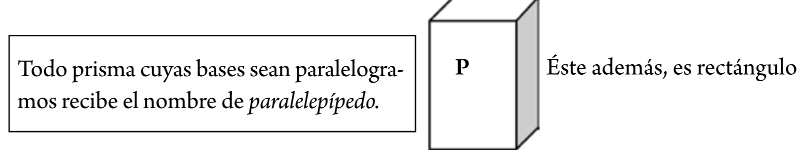
Paralelogramos

b. Abstracción

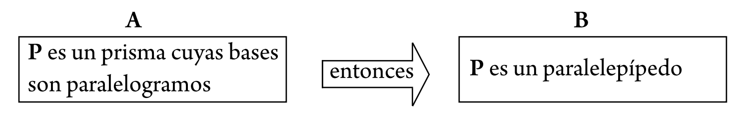
Buscamos las cualidades del objeto a definir: las bases de los prismas son polígonos “iguales” (observá las figuras que los representan) y sus caras laterales, son paralelogramos, es decir, cuadriláteros que tienen sus pares de lados opuestos paralelos.

c. Generalización

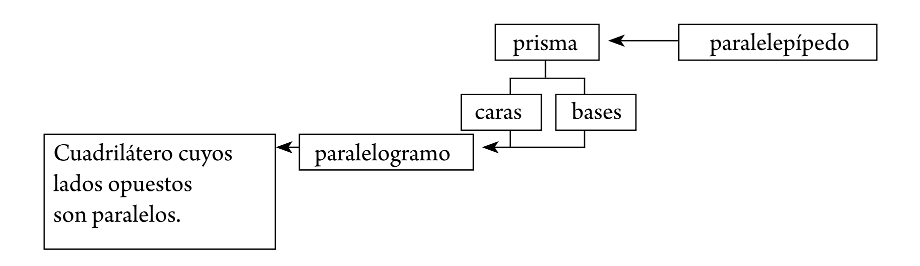
Seleccionamos, dentro del conjunto de prismas, aquellos que satisfagan la condición de tener por bases, también paralelogramos. Ahora podemos definir:



Pasemos a la estructura lógica de la definición donde **A** y **B** son proposiciones.



La siguiente secuencia “hacia atrás” vincula el nuevo concepto con los previos:



Para comprobar que lo entendiste analizá la siguiente definición separando **A** y **B** (como se hizo en el ejemplo anterior).

> "Una función φ (*x*) recibe el nombre de *infinitésimo* para **x** tendiendo al valor **a** si el límite de φ (*x*) para **x** tendiendo al valor **a**, es cero".

Normalmente, en los libros de texto, la definición se presenta así:

φ (*x*) es infinitésimo para **x** → *a si* $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$

¿Cuáles son los conceptos previos requeridos para entender esta definición? Mencionalos.

Se introduce acá un nuevo término: *infinitésimo* que proviene de *infinitesimal*. ¿Lo asociás con valores "pequeños" o "enormes"? Si contestaste "pequeños" lo estás interpretando, es decir, le estás atribuyendo un significado en el contexto matemático (valores muy pequeños de la función). Lo dotaste de sentido lo que no significa que ya lo "sepas". Para ello, debés ser capaz de graficar algunas funciones que satisfagan la condición requerida: los que tomen valores muy "pequeños" cuando la variable **x** se aproxime al número **a**.

Prueba de comprensión: dibujá dos sistemas de ejes cartesianos ortogonales y representá en ellos sendas funciones infinitesimales para **x** muy cercano al número 2 (por ejemplo).

Si hubieras memorizado la definición de infinitésimo sin haberla comprendido no tendrías un conocimiento nuevo y como lo que no se posee no se puede utilizar, el esfuerzo de memoria realizado para retener la definición no te permitiría transferirla a nuevas situaciones.

6.1.2 Propiedades

Una propiedad es un atributo o cualidad esencial de algo. Son estructuras lingüísticas que indican cómo proceder en determinada situación. Las propiedades pueden utilizarse para avanzar en el razonamiento o bien para retroceder, aunque algunas reglas son bidireccionales.

Tomemos algunos ejemplos:

a. La multiplicación de números reales posee la propiedad de ser distributiva a izquierda y a derecha con respecto a la adición.

Ninguna palabra de las utilizadas en el texto puede carecer de significado para vos. La palabra distributiva posee el mismo sentido que en el lenguaje ordinario. Al aplicar la propiedad avanzamos en el desarrollo de la operación distribuyendo (repartiendo) el factor c entre los sumandos, operación que puede realizarse hacia la derecha o hacia la izquierda.

Lo simbolizamos así:

$(a+b).c = a.\ c + b.\ c$ (a la derecha) $c.\ (a + b) = a.\ c + b.\ c$ (a la izquierda)

b. Expresar como logaritmo único la siguiente expresión:

$log_a\, m + log_a\, n - 2.log_a\, h$ En este caso deberemos "retroceder" en la aplicación de las reglas que permiten calcular el logaritmo de un cociente, de un producto y de una potencia.

En virtud de ello resulta: $log_a\, m + log_a\, n - 2.\ log_a\, h = log_a \dfrac{m.n}{h^2}$

c. La multiplicación entre números reales es conmutativa, es decir que $a.b = b.a$ (la tan conocida propiedad que afirma que *el orden de los factores no altera el producto*). Dado que conmutar es, en el lenguaje ordinario, cambiar una cosa por otra y en el caso de la multiplicación, *a.b* es lo mismo que b.a (ya que el producto es el mismo número) creo que debería llamarse permutativa (que significa cambiar el orden de las cosas) pues lo que la propiedad autoriza es a cambiar el orden de los factores.

Resumiendo: lo importante, además de lograr la expresión de las propiedades tanto en símbolos como en palabras, es su aplicación y para ello debe comprenderse cabalmente el sentido de cada uno de los términos utilizados al enunciarlas.

6.1.3 Teoremas

Los teoremas son proposiciones lógicamente demostrables a partir de axiomas (o de otros teoremas que hayan sido demostrados anteriormente), mediante reglas de inferencia aceptadas. Aclaremos lo expresado: una proposición es un conjunto de palabras con sentido completo; es una oración, por lo tanto posee sujeto y predicado.

Un axioma es una proposición tan clara y evidente, que se admite sin necesidad de demostración. También se los llama postulados y constituyen principios matemáticos fundamentales sobre los cuales se construye la

teoría. Ejemplo: “Existen infinitos puntos, infinitas rectas, infinitos planos”. ¿Quién se atrevería a discutirlo? El asunto es así y punto.

Volvamos al teorema. Está constituido por:

a. un enunciado del que se extraen la hipótesis y la tesis;

b. un cuerpo o sucesión de pasos encadenados lógicamente y tendientes a demostrar la veracidad de lo enunciado.

c. una interpretación geométrica (no factible en todos los casos, por supuesto).

La hipótesis está formada por todas las suposiciones que han de servir de punto de partida, o de base, para sacar de ella, la consecuencia; la tesis es la conclusión a la cual se arriba mediante el razonamiento.

Analicemos otro de los teoremas básicos del análisis matemático: el teorema de Rolle.

Analicemos un teorema. Copio textualmente el enunciado del teorema de Rolle, de un libro clásico de análisis matemático.

> “Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores a éste, reduciéndose a cero en los extremos $x=a$ y $x=b$; $[f(a)=f(b)=0]$, entonces, dentro del segmento $[a, b]$ existe por lo menos un punto $x=c$, $a < c < b$ en el que la derivada $f'(c)$ se reduce a cero, es decir, $f'(c) = 0$”

Habrás notado que en el enunciado, generosamente, el autor se encargó de decidir cómo se “llama” la función, cuáles son los extremos del intervalo y la letra que indica el punto intermedio y combinó palabras con símbolos (además de reiterar las condiciones) para ahorrarte el trabajo de pensar. Y esta “facilidad” (que se agradece) hace que todos los alumnos llamen indefectiblemente *[a, b]* al intervalo cerrado y *c* al punto intermedio, es decir, que memoricen todo.

Si el enunciado hubiese sido:

> “Si una función es continua en un intervalo cerrado y derivable en el abierto, anulándose en los extremos del primero, existirá al menos un punto del intervalo abierto en el cual la derivada se anula”

podrías haber llamado **f**, **g** o **φ** a la función (como te guste); [a, b], [m, n] o [p, q] al intervalo en cuestión: **c**, **ξ** o **h** al punto intermedio. Hubieras sido “libre” para pensar, imaginar y proponer y lo más importante, estarías en condiciones de aplicar el teorema a cualquier situación.



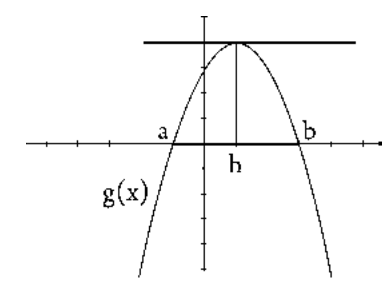
SEPARÁ, EN EL ENUNCIADO PROPUESTO EN SEGUNDO TÉRMINO, LAS CONDICIONES DE LAS QUE DEBERÁS PARTIR (HIPÓTESIS) Y LA CONCLUSIÓN A LA QUE HAY QUE ARRIBAR (TESIS). UBICALAS, EN PALABRAS, EN LA SIGUIENTE TABLA:

HIPÓTESIS	TESIS

Dibujá ahora una curva que satisfaga las condiciones de la hipótesis y decidí cómo llamarla. Colocá letras al intervalo que hayas considerado y escribí simbólicamente la hipótesis y la tesis sin olvidarte de emplear el cuantificador existencial (∃).

La tesis afirma la existencia de al menos un punto interior para el cual la derivada de la función se anula. Escribí simbólicamente la tesis y comenzá a pensar qué significa, desde el punto de vista geométrico, lo subrayado.

Ahora voy a crear yo una curva que represente una función $g(x)$; a los extremos del intervalo los llamaré **a** y **b** y al punto intermedio **h**.



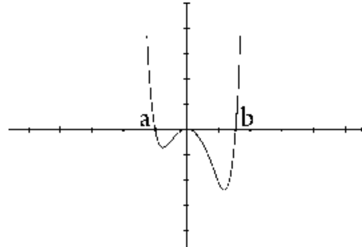
H) $y = g(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

T) $\exists\ h \in (a, b) / f'(h) = 0$

Basándome en "mi" dibujo (vos en el tuyo), puedo afirmar que si la derivada de la función evaluada en el punto h es nula ($f'(h)=0$) necesariamente la recta tangente a la curva en el punto $(h, f(h))$ debe ser horizontal.

Trazá en tu dibujo todas las rectas horizontales que sean tangentes a "tu" curva, dentro del intervalo considerado.

Ahora observá:



¿Cuántas rectas tangentes a la curva y paralelas al eje de abscisas pueden trazarse en este caso? (Obviamente en el intervalo real considerado, es decir el $[a, b]$).

Probá con distintos dibujos. Una vez comprendido el enunciado del teorema, la demostración (enlace de razonamientos y conocimientos anteriores) fluye sin mayores problemas a partir de las definiciones de función creciente y decreciente y su relación con el signo de la derivada.

6.1.4 Preguntas y consignas

Una de las dificultades más frecuentes para los estudiantes (sobre todo durante los exámenes) la constituye la interpretación de preguntas y consignas.

a. *Las preguntas*

Leé la siguiente pregunta: ¿Qué valores tienen las componentes del vector gradiente de un campo escalar **z** en el punto (x_0, y_0) de su dominio, si en dicho punto el campo presenta un mínimo relativo?

Obviamente se parte de que el alumno sabe qué es un campo escalar, su dominio, lo que es un mínimo relativo y qué es el gradiente. No obstante, la experiencia me dice que la interrogación al comienzo dificulta (o por lo menos retarda) la comprensión del problema.

Cambiemos la pregunta colocando la interrogación al final.

Si en el punto (x_0, y_0) del dominio del campo escalar **z** $= f(x, y)$, éste alcanza un mínimo relativo, ¿qué valores tienen las componentes del vector gradiente en dicho punto?

En este caso, los datos, que se dan al principio, te conducen al rescate de los conocimientos requeridos y luego, en forma natural, a la respuesta.

DATOS	CONOCIMIENTOS	RESPUESTA
(x_0, y_0) es un punto del dominio de **z** $f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo de **z** $= f(x, y)$	- existe $f(x_0, y_0)$. - Las derivadas parciales de **z** en dicho punto deben ser nulas o no existir. - El vector gradiente en un punto tiene por componentes, las derivadas parciales evaluadas en el punto.	Las componentes deben ser nulas (si existen). Simbólicamente: $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

Cuando te enfrentés con una pregunta de examen que comienza con un signo de interrogación, recuperá los datos incluidos en ella y procedé a formular nuevamente el interrogante anteponiéndolos.

b. *Las consignas*

Tienen que ver con las habilidades matemáticas que se pretende poner en juego en cada situación y es muy importante que sepas interpretarlas porque de ello dependerá lo que hagas a continuación.

b.1. *Definir:* es establecer mediante una proposición (en palabras o simbólicamente) las características suficientes del objeto de estudio.

Ejemplo: Definición de dominio de una función $y = f(x)$.

EN PALABRAS	EN SÍMBOLOS
Es el conjunto de todos los valores reales que puede tomar la variable **x** para los cuales la función *f(x)* existe, es decir, es un número real.	$D_f = \{x \in \Re / f(x) = y; y \in R\}$

Definí simbólicamente "entorno de un punto x_0". Te lo expreso en palabras.

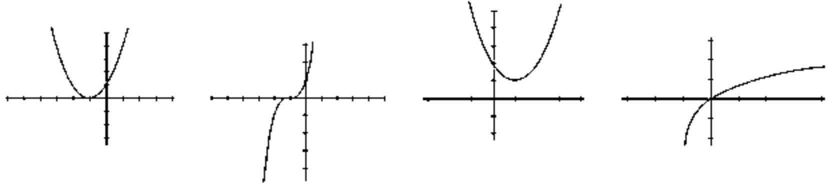
En palabras	¿En símbolos?
Conjunto de todos los valores reales tales que sus distancias a x_0 sean menores que un cierto número positivo δ	

Definí en palabras "Curva de nivel **H** de un campo escalar $z = f(x, y)$"

¿En palabras?	En símbolos
	$C_H = \{(x, y) \in \Re^2 / f(x, y) = H\}$

b.2. *Identificar:* es distinguir el objeto matemático sobre la base de sus rasgos esenciales.

Por ejemplo: identificá entre las siguientes gráficas, aquéllas que correspondan a funciones infinitesimales en algún punto de su dominio.



b.3. *Explicar:* es articular un discurso (oral o escrito) con el propósito de hacer entender a alguien, el carácter de verdad de un determinado enuncia-

do o de un resultado obtenido. Por ejemplo: explicá cómo procediste para llegar al resultado (en referencia a un determinado problema).

b.4. *Demostrar:* es obtener, por deducción, partiendo de una serie de enunciados organizados, una consecuencia válida según las reglas de la comunidad matemática. En esto consiste la demostración de un teorema.

b.5. *Graficar:* (se puede reemplazar por la expresión "representar gráficamente") y significa representar el objeto material o inmaterial atendiendo sólo a sus líneas o caracteres significativos.

Ejemplos:

b.5.1. Esquematizá un automóvil subiendo una cuesta con inclinación de 30°. (Se entiende que sólo tendrás en cuenta las líneas principales del vehículo y que no necesitás medir el ángulo).

b.5.2. Graficá una parábola que abra hacia abajo, esté desplazada a la izquierda con respecto al eje y que pase por el origen de coordenadas.

6.1.5 Resolución de problemas

Es muy importante que tengas en cuenta que la resolución de problemas no constituye un "apartado" dentro de la asignatura ni el "cierre" obligado de cada tema. Se trata de una actividad que atraviesa el programa mediante desafíos constantes a tu razonamiento, tu creatividad, tus esquemas mentales y tus conocimientos previos. A la vez, dota de sentido a los distintos contenidos "mostrándote" el indiscutible valor de lo aprendido y su proyección a los distintos campos de la actividad humana.

Para resolver problemas es necesario poseer dominio de las técnicas básicas pero no basta con esto. De hecho, no podrías resolverlos si, por ejemplo, no supieras cuántos divisores tiene un número, cuándo un número es primo, qué propiedades es lícito aplicar en la operatoria requerida, cuándo estamos frente a una función exponencial o logarítmica, qué es una ecuación o una inecuación, cómo se las resuelve… (la lista es muy, pero muy extensa porque incluye los contenidos de todas las matemáticas anteriores –secundaria y universitaria).

¿Cómo podrías realizar estimaciones si desconocieses qué es una probabilidad, un porcentaje, un gráfico estadístico?

¿Encontrarías alternativas válidas para intuir soluciones si carecieras de capacidad para realizar diagramas adecuados o plantear, por ejemplo, optimizaciones pertinentes?

¿Creés factible resolver problemas geométricos si no estás en condiciones de graficar una figura o reconocer sus elementos constitutivos?

Mucho se ha escrito acerca de la resolución intuitiva de problemas pero la misma se lleva a cabo utilizando un implícito bagaje de conocimientos debidamente fundamentados. La manera de buscar la solución a los problemas a partir de tanteos basados en la intuición, es decir, sin aplicación de un método científico riguroso se denomina heurística (DRAE). La misma permite aprehender las relaciones entre elementos que parecieran estar desvinculados entre sí y quien "ve" cosas que otros no "ven" y es capaz de idear soluciones al problema, posee, si duda, una mente matemáticamente intuitiva. Pero, ¡atención¡: lo que se intuye luego debe ser desarrollado lógicamente.

Para hallar la solución de un problema debemos tener en cuenta tres cuestiones fundamentales: comprensión del lenguaje, contexto y operaciones.

<table>
<tr><th>LENGUAJE (aspectos)</th><th>TIENE EN CUENTA</th><th>CONTEXTUALIZACIÓN</th><th>OPERACIONES Y TÉCNICAS</th></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td>El conocimiento de los conceptos involucrados.</td><td rowspan="4">Se refiere a la ubicación del problema en el campo del conocimiento en el cual se ha planteado.
Exige familiaridad con las situaciones descritas en el problema.</td><td rowspan="4">Exige el conocimiento de las reglas que rigen las operaciones, de las propiedades que deben aplicarse en cada caso y de las estrategias y técnicas requeridas para la solución del problema.</td></tr>
<tr><td>Semántico</td><td>El significado de los términos empleados.</td></tr>
<tr><td>Sintáctico</td><td>La construcción gramatical de las expresiones.</td></tr>
<tr><td>Representacional</td><td>Las imágenes mentales.</td></tr>
</table>

Partamos de un sencillo problema para analizar sobre él, lo consignado en el cuadro precedente:

La función de ingreso total de una compañía es $R(p) = -40\,p^2 + 3920\,p$ donde p es el precio fijado para el producto, en dólares.

a. Determine el precio que maximiza el ingreso total.

b. Calcule el valor máximo del ingreso.

c. Grafique R(p).

Aspectos del lenguaje	preguntas que debemos formularnos
Conceptual	¿Qué es el ingreso total? ¿A qué se le llama valor máximo de una función?
Semántico	¿Qué significa maximizar una función? ¿Qué entiendo por determinar, calcular, graficar?
Sintáctico	¿Están correctamente construidos, desde el punto de vista lingüístico, el enunciado y las consignas, es decir, son entendibles?
Representacional	¿Qué tipo de curva representa a la función ingreso total en este caso?

contextualización	¿A qué campo de la realidad corresponde el problema planteado? ¿Cuáles son las variables intervinientes? ¿Qué unidades de medida se utilizan en el planteo del problema?

operaciones y técnicas	¿Conozco la forma de obtener el extremo de una función? ¿Domino la técnica de la derivación? ¿Sé hallar los ceros de una función? ¿Puedo calcular el valor numérico de una expresión? ¿Estoy en condiciones de dibujar una curva referida a un sistema de ejes cartesianos? ¿Reconozco el papel de cada variable en el problema? ¿Manejo el sistema de unidades utilizado?

El problema puede ser resuelto analítica o geométricamente. Hagámoslo de las dos maneras:

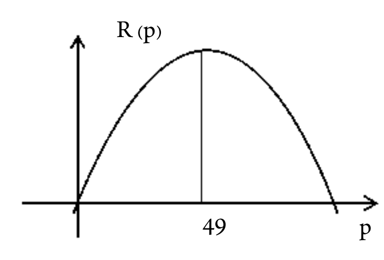
a. Analíticamente. $R'(p) = -80p + 3920$

Condición necesaria para la existencia de extremos: $R'(p) = 0$ (ya que la derivada existe para todo valor real)

$-80p + 3920 = 0$ luego $p = 49$

Condición suficiente: $R''(p) \neq 0$ y en este caso negativa, lo que indica máximo.

b. Geométricamente.



Determinación del vértice de la parábola

$x_V = \frac{-3920}{2.(-40)}$ $x_V = 49$

El máximo se encuentra cuando el número de unidades del producto es 49. Valor máximo del ingreso = ordenada de la parábola. $y_V = 96040$

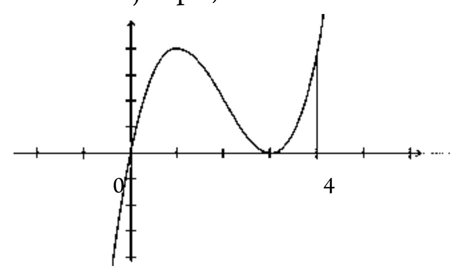
6.2 Estudiemos algo juntos

Para explicarte de qué manera podrías encarar el aprendizaje de la matemática tengo que recurrir a algún contenido. Esto ayudará a aclarar las ideas.

Tomemos un tema del programa de Cálculo I: extremos de una función escalar y procedamos a su estudio, admitiendo que existen distintas maneras de estudiar y que la que se expone a continuación constituye sólo una muestra que pretende articular lo antes desarrollado.

En primer lugar, no podemos desconocer el significado de ninguna de las palabras que utilicemos: Tomemos un tema: Extremos de una función escalar.

a. ¿Qué significa extremo? Viene del latín *(extremus)* y quiere decir parte primera o última de algo; principio o fin de ello; punto último al que puede llegar algo (DRAE). Hay que contextuar: estamos en matemática, hablando de funciones escalares, por lo tanto nos estaremos refiriendo al punto último que puede alcanzar la función (sea el mayor o el menor de sus valores). Traemos de la memoria el concepto de función escalar y con él "nos viene" la representación mental de alguna función. Como no nos dicen de qué función se trata disponemos de libertad para imaginar cualquiera y la graficamos. Por ejemplo, ésta:

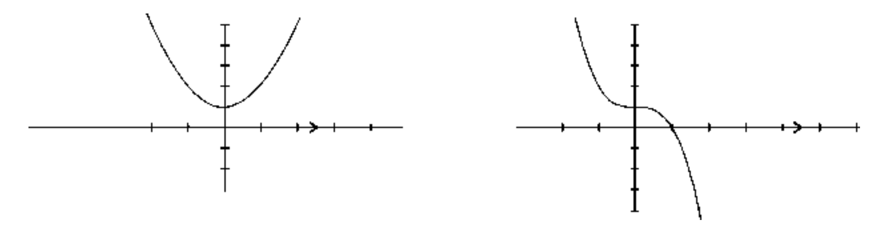


Tanto el valor más grande que toma la función (máximo) como el menor de todos, (mínimo) deben ser "buscados" sobre el eje de ordenadas ya que en él se representan los valores de la función. Pero como no sabemos de dónde "viene" la curva ni hacia adónde "va",

debemos precisar el campo de variabilidad de **x** (conjunto de valores que puede tomar la variable independiente).

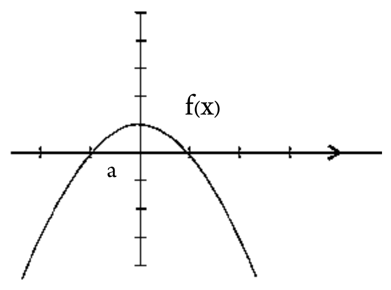
b. Campo de variabilidad de **x**. Puede ser el conjunto de los números reales –o un subconjunto de éste– al cual llamamos dominio (D_f).

Observá las siguientes gráficas:



En el primer caso, el dominio es el de los números reales mayores que 1 o igual a 1; en el segundo, todos los reales ($\Re$). Cuando hablamos de extremos absolutos debemos considerar todo el dominio de la función o bien, un intervalo cerrado (como en el ejemplo de partida).

c. Definición de extremos absolutos de $y = f(x)$



Definamos en palabras dicho extremo (leé la primera fila de la siguiente tabla) y luego, en símbolos (segunda fila).

"El valor de la función en el punto **a**	es el mayor de todos los valores que toma la función	para cualquier valor de la variable independiente en todo el dominio de la función".
$f(a)$	$f(a) > f(x)$	$\forall x / x \in D_f$

Ahora estructuremos simbólicamente la definición:

$f(a)$ es M_{abs} de $f(x)$ en $D_f \Leftrightarrow \forall x \in D_f : f(a) > f(x)$ (En este caso se trata de un máximo en sentido estricto).

En ella se tuvieron en cuenta los tres registros del lenguaje matemático: el de las palabras, el de los símbolos y el gráfico.

Veamos: escribo en símbolos una definición y lo pasás a palabras y esquematizás la función respetando las letras propuestas.

f(b) es m_{abs} de f(x) en [m,n] $\Leftrightarrow \forall x \in [m,n]: f(b) < f(x)$

Prestá atención a esto ahora:

Decir que	Implica	Que
f (a) > f(x)	$\Rightarrow$	f(x) < f(a)
f(a) es mayor que f(x)		f(x) es menor que f(a)

Por lo tanto, la definición de máximo absoluto en el dominio podría haberse presentado de la siguiente manera:

f(a) es M_{abs} de f(x) en D $\Leftrightarrow \forall x \in D_f$: f(x) < f(a)

Escribí en palabras la definición precedente.

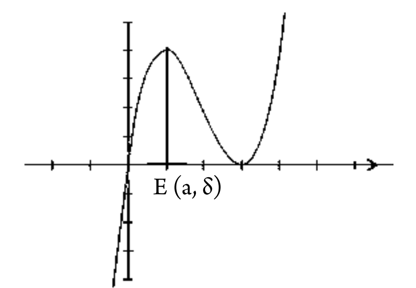
Los extremos absolutos de una función –reitero– se definen en todo el dominio de la misma o en un intervalo cerrado y pueden ser estrictos o no estrictos (en sentido amplio). Como estricto quiere decir ajustado a la ley, cuando escribimos f(x) < f(a) no existe ninguna posibilidad de que f(x) sea mayor que f(a) ni igual a f(a).

Si la notación fuera f(x) $\leq$ *f(a)* estaríamos admitiendo que el valor que toma la función nunca es mayor que f(a), pero puede ser igual. Acá el extremo es no estricto.

f(x) $\leq$ *f(b)* se lee: f(x) nunca es menor que f(b). Una cuestión de lenguaje ¿ves?

d. Extremos relativos o locales

Los extremos relativos se definen considerando un entorno de un punto. Recordá que entorno quiere decir vecindad y que debés identificar el punto y un radio que te permitirá desplazarte cierta distancia a ambos lados del punto. El entorno del punto **a** con un radio δ, se expresa: E (a, δ)



El entorno de un punto es el conjunto de todos los puntos cuyas distancias al dado se mantengan acotadas por el valor del radio que en este caso es δ.

Volvemos a practicar el uso de los dos lenguajes con los que se expresa la definición:

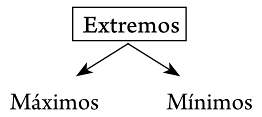
f(a) es M_{relat} de f(x)	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in E(a, \delta)$	:	$f(x) \leq f(a)$
f(a) es máximo relativo de la función	sí y sólo sí	para cualquier valor de la variable, perteneciente al entorno de centro a y radio delta	se cumple que	el valor de la función nunca es mayor que f(a)

Espero haber sido clara.

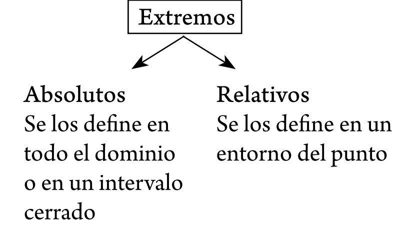
¿Cómo retenemos el tema? Memorizando las definiciones, NO. Tratemos de sistematizar lo leído.

Se efectuaron tres clasificaciones de los extremos de una función escalar:

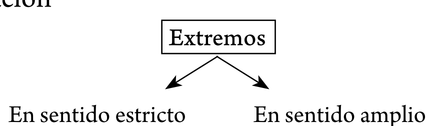
Primera clasificación



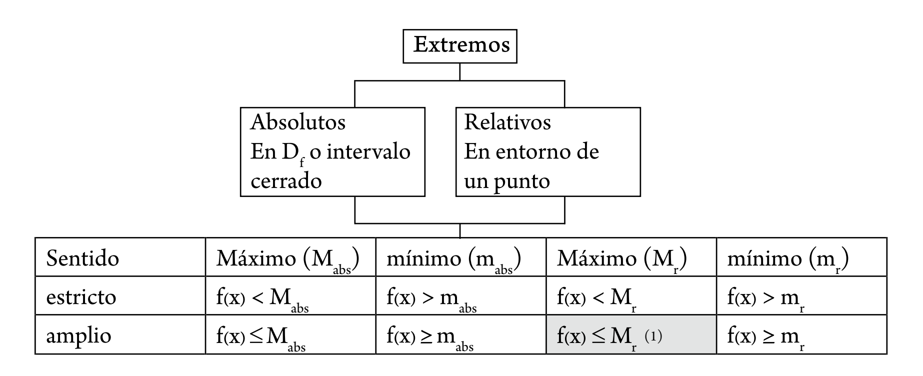
Segunda clasificación



Tercera clasificación



Podemos unificar las tres clasificaciones en un diagrama, para facilitar una nueva lectura.



Sentido	Máximo (M_{abs})	mínimo (m_{abs})	Máximo (M_r)	mínimo (m_r)
estricto	$f(x) < M_{abs}$	$f(x) > m_{abs}$	$f(x) < M_r$	$f(x) > m_r$
amplio	$f(x) \leq M_{abs}$	$f(x) \geq m_{abs}$	$f(x) \leq M_r$ (1)	$f(x) \geq m_r$

Tomemos la celda sombreada, elaboremos la definición:

> (1) El máximo relativo de una función f(x) (en sentido amplio) es el valor Mr tal que para todos los puntos del entorno considerado, la función asuma valores que sean "no mayor" que M_r".

Probá definir otro de los extremos consignados en la tabla y realizá la graficación correspondiente. Cuando estés en condiciones de definir los siete restantes, podés descansar: ¡el tema ha sido aprendido!

6.3 Cuándo estudiar

¡Siempre! Estudiar debe constituir un hábito. Si estás cursando una asignatura, a medida que se desarrollan los temas en clase hay que estudiarlos. De no ser así, no podrías avanzar en los contenidos siguientes.

El aprendizaje de la matemática exige dedicación y concentración pues contempla diversos procesos:

a. comprensión
b. dominio del lenguaje formalizado
b. retención de lo estudiado
c. resolución de ejercicios y problemas
d. comunicación de lo aprendido

La mejor distribución del tiempo te la proporciona el cronograma propuesto por el profesor. El mismo te indica cuántas semanas te ha de insumir el estudio de cada tema si lo hacés metódica y responsablemente.

El horario que dediqués al estudio de la asignatura dependerá, lógicamente, de las actividades que normalmente realizás pero debés tener en cuenta que:

- No se puede razonar con claridad cuando uno se encuentra agotado por lo que hizo antes de sentarse a estudiar matemática; si estás cansado, es conveniente que reposés un rato o disfrutés de alguna actividad placentera que prepare tu ánimo favorablemente.

- No es conveniente estudiar inmediatamente después de las comidas y mucho menos cuando otras preocupaciones ocupan tu mente.

- Una vez elegido el horario de estudio debés respetarlo, habituarte a él y sólo cambiarlo por razones realmente valederas.

- La distribución temporal tiene que contemplar el equilibrio entre los procesos detallados con anterioridad.

6.4 Dónde estudiar

El lugar de estudio es de suma importancia para que el esfuerzo dé buenos resultados. Sólo si estás cómodo querrás permanecer mucho tiempo ahí.

El ambiente debe ser:

- Tranquilo, es decir, alejado de los movimientos y ruidos habituales de la casa; en lo posible, distante de la puerta de acceso desde el exterior, de teléfonos, televisores, radios y niños. Recordá que si la atención se dispersa, el objeto se desenfoca.

- Iluminado en forma natural si estudiás de día o con lámparas bien ubicadas y de la potencia adecuada si lo hacés de noche.

- Ventilado. Aun cuando haga frío deberás airear la habitación de vez en cuando ya que un ambiente demasiado cerrado produce, al cabo de unas horas, embotamiento.

- Suficientemente amplio como para que te permita desplegar en forma cómoda libros, apuntes y demás elementos de trabajo. Además, prestá atención a la silla que vas a ocupar y a la altura de la mesa respecto de ella. Tus pies deben descansar normalmente sobre el piso y tu espalda mantenerse derecha y apoyada en el respaldo.

- Ordenado y agradable ya que tenés que permanecer allí un tiempo prolongado y esto sólo se consigue si estás a gusto.

6.5 Reflexiones finales

¿Cuáles son las claves del éxito?

Si leíste atentamente los capítulos anteriores habrás comprendido que nadie puede hacer por vos otra cosa que no sea brindarte apoyo y compañía

en ese camino que parece tan arduo pero que es, sin duda, apasionante: el que conduce al conocimiento matemático.

Una actitud positiva frente a la asignatura y hacia el estudio en general, la armonización de los hemisferios cerebrales para lograr conocimientos integrados, el esfuerzo por comprender y dominar el lenguaje específico de la matemática, la manera de encarar el estudio de los distintos aspectos que esta ciencia contempla y la adecuada organización de tiempos y espacios son las variables decisivas para el éxito que esperás. ¡Adelante!



SÍNTESIS

Este capítulo fue escrito con el propósito de mostrarte una manera –no la única– de encarar el estudio de algunas cuestiones fundamentales de la matemática formalizada: comprensión de conceptos, propiedades, teoremas y resolución de problemas. La idea es inducirte a que efectúes la vinculación entre los tres registros del lenguaje matemático para construir un conocimiento útil y transferible.

El lugar que elijas para estudiar, las condiciones anímicas adecuadas para hacerlo, la indiscutible importancia de los conocimientos previos y la necesaria formación del hábito de estudio son algunos de los temas que he considerado conveniente incluir en la obra.

A modo de ejemplo, para ajustar la propuesta de estudio que subyace en el desarrollo del libro, incorporé uno de los contenidos básicos del cálculo: extremos de una función escalar.

Bibliografía

ALAGIA, H; A. BRESSAN y P. SADOVSKY (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

ALCÁNTARA, J. A. (1988). *Cómo educar las actitudes.* Barcelona: CEAC.

ANTUNES, C. (2003). *¿Qué es el Proyecto 12 días/12 minutos?* Petrópolis, Brasil: Vozes Traducción de Ulises Pasmadjian: San Benito.

ARMSTRONG, T. (2000). *Inteligencias múltiples en el aula.* Guía práctica para educadores. Barcelona: Paidós, 2006.

APARICIO, A y J. BAZÁN (1997).Actitudes hacia la matemática en ingresantes a la Universidad Agraria la Molina. *Más Luz.* Revista de Psicología y Pedagogía.

ARENDT, HANNA (1995). *De la historia a la acción.* Barcelona: Paidós.

ARRIARÁN, S. y J. R. SANABRIA (comps) (1995). *Hermenéutica, educación y ética discursiva.* (en torno a un debate con Kart-Otto Apel). México: Universidad Iberoamericana.

AUSUBEL, D.P. (1976). *Psicología educativa: un punto de visa cognoscitivo.* México: Trillas.

BAJTIN, M.M. (1982). *Estética de la creación verbal.* México: Siglo XXI, 1990.

BENVENISTE, E. (1977). *Problemas de lingüística en general.* Traducción de Juan Almela. México: Siglo XXI, 1981.

BERTIN, J. (1988). *La gráfica y el tratamiento gráfico de la información.* Madrid: Taurus.

CAMPOS CAMPOS, Y. (1985). *La reprobación en matemáticas.* Identificación de causas y posibles soluciones. Guadalajara: CIAEM.

CANTORAL, R. *et al.* (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

CHOMSKY, N. y G. MILLER (1963). *El análisis formal de los lenguajes naturales.* Madrid: Talleres Gráficos Montaña, 1972.

CHOMSKY, N. y J. PIAGET (1979). *Teorías del lenguaje.* Teorías del aprendizaje. Barcelona: Crítica, 1983.

CULLEN, C. (1997). *Crítica de las razones de educar.* Buenos Aires: Paidós.

DAVINI; GELLON de Salluzzi; R. (1978). *Psicología general.* Buenos Aires: Kapelusz.

DELORS, J. (Presidente de la Comisión Internacional sobre educación para el siglo XXI) *Informe a la UNESCO* (1996). La educación encierra un tesoro. Madrid: Santillana.

DICKSON, L., M. BROWN y O. GIBSON (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* España: Labor.

DUBET, F. y D. MARTUCCELLI (1998). *En la escuela.* Sociología de la experiencia escolar. Buenos Aires: Losada. [Original: 1996. A l´ecole. Sociologie de l´experience scolaire. París: du Seuil].

DUVAL, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano.* Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Peter Lang SA. Traducción Myriam Vega Restrepo, 1999.

ECHEVERRÍA, P.M. (1998). *La solución de problemas en matemática.* En POZO, J. I; J. DOMÍNGUEZ, E. y POSTIGO (comps): 60-65. México: Santillana, 1998.

ECO, H. (1976). *Signo.* Barcelona: Labor, 1980.

_______ (1979) *Tratado de semiótica general.* Barcelona: Lumen.

ELLIS, A. W. y A. W. YOUNG (1988). *Human cognotive neuropsycology.* En castellano: Neuropsicolgía humana. Barcelona: Masson, 1992.

FERIA URIBE, M. A. et al (2006). *Percepción espacial y geometría intuitiva.* Barcelona:. Paidós.

GARDNER, H. (1999). *La educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas.* Barcelona: Paidós, (2000).

GOODENOUGH, W. (1971). *Cultura, lenguaje y sociedad.* En: KAHAN, J.(comp) (1975). El concepto de cultura: textos fundamentales (157-244). Barcelona. Anagrama.

GUÉNARD, F. y G. LELIEVRE (1984). *Pensar la matemática.* 3ª edición. España: Tusquets, 1999.

GUERRERO, E. *et al.* (2002). *El tratamiento de la ansiedad hacia las matemáticas.* En: GARCÍA, J. (coordinador) Aplicaciones de intervención psicopedagógica. Madrid: Pirámide.

GUZMÁN, M. de y J. COLERA. (1989). *Matemáticas I y Matemáticas II.* Barcelona: Anaya.

HOLLANDER, E. (1998). *Principios y métodos de psicología social.* Buenos Aires: Amorrortu.

JIMENO, M. (2006). *¿Por qué las niñas y los niños no aprenden matemáticas?* Barcelona: Octaedro.

LOVELL, K. (1986). *Desarrollo de los conceptos matemáticos en los niños.* Morata.

MAIER, H. (1999). *El conflicto para los alumnos entre lenguaje matemático y lenguaje común.* México: Grupo editorial Iberoamericana.

MARCIPAR KATZ, S. (2000). El sentido del símbolo. *Económicas hoy.* Revista de la Secretaría de Cultura del CECE N° 3 junio de 2000.

MAYER, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Paidós.

MORALES, J. M. *et al.* (1994). *Psicología social.* Madrid: McGraw-Hill.

MORIN, E. (1977). *El método I: la naturaleza de la naturaleza.* Madrid: Cátedra, 1986.

_______ (1994). *El conocimiento del conocimiento.* Buenos Aires: Cátedra.

ORTON (1996). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Morata.

PANIZZA, M. (2005). *Razonar y conocer.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

PEIRCE, C.S. (1965). *Obra lógico-semiótica.* Madrid: Taurus. 1987.

PIAGET, J. (1977). *Psicología de la inteligencia.* Río de Janeiro: Zahar.

PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Morata.

PISKUNOV, N. (1969). *Cálculo diferencial e integral.* Traducido del ruso por el ingeniero K. Medrov. URSS: Mir, 1977.

RABUFETTI, H.T. (1970). *Introducción al análisis matemático.*10[a] edición. Buenos Aires: El Ateneo.1984.

RESNICK, L. y W. FORD (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Madrid: Paidós.

REY, M. E. (1993). *Seis ensayos en busca del pensamiento perdido.* Reflexiones sobre los procesos de aprendizaje. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

SACRISTÁN, G. y A. PÉREZ GÓMEZ (1989). *La enseñanza: su teoría y su práctica.* España: Akal.

SADOVSKY, P. (2005). *Enseñar matemática hoy.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

SALVATECCI, A. O. (2002). *Cómo estudiar con éxito.* Técnicas y hábitos para aprender mejor. Alfaomega.

SAMAJA, J. (1996). *El lado oscuro de la razón.* Buenos Aires: JVE. Psique.

SCHELER, M. (1972). *El saber y la cultura.* Buenos Aires: La Pléyade.

SCHOENFELD, A. (1985). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas.* Separata de La enseñanza de la matemática a debate. Madrid.

SKEMP, R. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* 2[da] edición. Madrid: Morata, 1993.

SUMMERS, G. F. (1976). (Compilador). *Medición de actitudes.* México: Trillas.

THAGARD, P. (2008). *La mente.* Introducción a las ciencias cognitivas. Madrid: Katz. Edición original: Mind. Introduction to cognitive science. The MIT Press. 2005.

VYGOTSKI, L.S. (1934). *Pensamiento y lenguaje.* Madrid: Visor. 1993.

Documentos electrónicos

ALONSO, D. y L. J. FUENTES. Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático. *Revista Neurología 2001*; 33:568-576. www.revneurol.com. [Consulta: 22 de noviembre 2007]

BAUTISTA VALLEJO, J.M. [en línea] *Actitudes y valores: precisiones conceptuales para el trabajo didáctico.* Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Huelva. [Consulta: 27 diciembre 2007]. http://dewey.uab.es/pmarques/dioe/bautistaactitudes.doc

BAZÁN, J. L. y A.S. APARICIO [en línea] Las actitudes hacia la matemática-estadística dentro de un modelo de aprendizaje. *Revista Semestral de Departamento de Educación.* Perú. Vol XV, n 28. 28 marzo 2006. [Consulta: 20 noviembre 2007] www.pucp.edu.pe/biblioteca/

BOEREE, G. Traducción al castellano: Dr. GAUTIER, R. *Teorías de la personalidad.* G. ALLPORT y EYSENCK, H. www.psicologíaonline.com [Consulta: 7 de mayo de 2008].

CAMPOS CAMPOS, Y. *Importancia de las actitudes en la educación matemática.* Ponencia en Asociación Nacional de Profesores de Matemática. [Consulta: 27 diciembre 2007] http://camposc.net

CASTRO DE BUSTAMANTE, J. *La evaluación de actitudes desde una perspectiva estructural.* Universidad de los Andes. [Consulta: 20 diciembre 2007] http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/edocs/pubelectropnicas/evaluacioninvestigacion/vol1

CLAUDÍ ALSINA 2005. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* N°4

Creatividad y educación matemática. http://.ilustrados.com/publicaciones/EEkyZAlupFfpyLonJW.

CRECER [en línea]. ¿Te gustan las clases de matemáticas? ¿Y las de lenguaje? Las actitudes. El aprendizaje. Ministerio de Educación del Perú. *Boletín N*°2 (2000). [Consulta: 11 marzo 2008]. http://www.minedu.gob.pe

DEL PRADO, D. *Estimular la creatividad en el aula.* http://educar.jalisco.gob.mx/10/10entre

DUMONT, J.L. *La praxeología.* ¿Qué ciencias para qué prácticas en el campo de la información? http://www.anuies.mx/servicios/p_anuies/publicaciones/revsup/res085

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano.* Grupo de Educación Matemática. http://sintesis.univalle.edu.co/saladelectura/semiosis. Consulta: 27 de mayo de 2006]

FISHBEIN y AJZEN, 1980. Teoría de formación y cambio de actitudes. *Revista Iberoamericana de Educación* N°42/1-25 de febrero de 2007. www.rieoei.org/rie2

GARGALLO LÓPEZ, *et al.* [en línea].Actitudes ante el aprendizaje y rendimiento académico de los estudiantes universitarios. *Revista Iberoamericana de Educación* N°42 (ISSN: 1681-5653 25/02/07). [Consulta: 15 noviembre 2007]. http://www.rieoei.org/boletin42_5

GEOCITIES [en línea]. *Influencias sobre las actitudes y modificación de la conducta.* [Consulta: 27 diciembre 2007] http://geocities.com/psicologial/psicoarticulos/actitud.htm.

GIL IGNACIO, N.; E. GUERRERO BARONA y L. BLANCO NIETO [en línea] El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Extremadura. *Revista electrónica de Investigación Psicoeducativa.* ISSN.1696-2095. Vol 4, n 8 (2006: 47-72) [Consulta: 20 noviembre 2007] http://investigacionpsicopedagogica.org/revista/articulo/8/espannol/Art_8_96.

GODINO, J. D. *Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática.* Ponencia del XVI Congreso Nacional: *Incontri con la Matemática.* Castel San Pietro Terme (Bologna) noviembre de 2002. Trabajo recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/ [Consulta: 20 de mayo de 2007]

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Investigación en Didáctica de la Matemática.* Vol.22, n 2-3, 237-284. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/ [Consulta: 20 de mayo de 2007]

GODINO, J. D. y Á. M. RECIO (1998). *Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática.* Universidad de Granada y Universidad de Córdoba. [Consulta 5 de diciembre de 2005] http://www.sectormatematica.cl/educmatem/semiótico.htm

GÓMEZ CHACÓN, I. M. y L. FIGUEIRAL. Identidad y factores afectivos en el aprendizaje de la matemática. *(Identité e facteurs affectifs dans l´apprentissage des mathématiques).* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,Vol 12: 117-146.[Consulta: 10 enero 2008] http://www.scielo.org.ve/scielo

http://es.wikipedia.org/weiki/lenguaje¬_formalizado. *Lenguaje formalizado.* [Consulta: 20 de febrero de 2008]

http://es.wikipedia.org/weiki/lenguaje¬_formalizado. *Lenguaje formalizado.* [Consulta: 20 de febrero de 2008]

http://es.wikipedia.org/wiki/notación. *Notación matemática.* [Consulta: 26 de mayo de 2007]

http://members.aul.com/jeff570. *Símbolos matemáticos.* [Consulta: 12 de noviembre de 2007]

http://www.matematicas.net/paraiso/etimología [Consulta: 27 de diciembre de 2007]

http://www.psicología-online.com/ebooks/personalidad/allport.htm [Consulta: 3 de enero de 2008]

LABRA GAYO, J. E. y D. FERNÁNDEZ LANVIN. *Lógica de predicados.* [Consulta 29 de junio de 2008] http://www.di.uniovi.es/labra

LARIOS ORSORIO, V. Algo sobre el rigor del lenguaje. *Gaceta COBAQ.* Año XIV, n 124, marzo-abril 1997:8-13. http://www.uaq.mx/matermaticas/vlarios

MARTÍNEZ, J. y P. ARGIBAY. El aprendizaje de las matemáticas y el cerebro *Ciencia Hoy en línea.* Vol. 17, n 99, junio-julio 2007. Unidad de Ciencias Cognitivas, Instituto de Ciencias Básicas y Medicina Experimental, Hospital Italiano de Buenos Aires. [Consulta: 7/09/2007] http://cienciahoy.org.ar/ln/hoy99/aprendizaje.htm

OOSTRA, A. Los diagramas de la matemática y la matemática de los diagramas. *Boletín de Matemáticas.* Nueva Serie Vol. VIII, n1 (2001) [Consulta: 11 de noviembre de 2007]

OOSTRA, A. Peirce y los diagramas. II Jornada del Grupo de Estudios Peirceanos. *La lógica de Peirce y el mundo hispánico.* Pamplona. España. http://www.unav.es/gep/Artículo/Peirce.[Consulta: 27 de junio de 2008]

ORLANDO, E. *Comprensión lingüística y conocimiento a priori.* Artículo inédito. http://www.accionfilosofica.com 1114129632.art.doc. [Consulta: 12 de noviembre de 2007]

PADILLA MAGANA, R. A. La comprensión del cerebro: hacia una nueva ciencia del aprendizaje. *Perfiles educativos* [on line].2005, vol 27, n109-110. [Consulta: 7 de abril de 2008] http://scielo.unam.mx/scielo

PALAZZESI, A. *Intuición: ¿ciencia o pseudociencia?* [Consulta: 22 de mayo de 2008] http://www.neoteo.com/intuición-ciencia-o pseudociencia.neo

PARANORMAL. Formarse. *La intuición: el sexto sentido.* [Consulta: 22 de mayo de 2008] http://.formarse.com.ar/panormal/intuición.htm

RAMIREZ RINCÓN, E. *Investigación: comprensión del lenguaje matemático por parte de estudiantes de primer semestre de ingeniería.* Universidad de Ciencias Aplicadas y ambientales UDCA [Consulta: 9 de septiembre de 2007]. http://www.scm.org.co/Subidos/1151.2-INVESTIG.doc

RODRÍGUEZ SALAZAR, M. Cl.y J. C. MONTOYA. *Acta Colombiana de Psicología.* ISSN 0123-9155 versión impresa. Entrenamiento en el mantenimiento de la atención en deportistas y su efectividad en el rendimiento. [Consulta: 8 de mayo de 2008] http://scielo.org.co/scielo

SCIENCY DAILY. University of Bristol (2008, April 25) *Importante paso adelante en la comprensión de cómo funciona la memoria.* [Consulta: 24 de mayo de 2008] http://64.233.179.104/translate

SERRANO GÓMEZ, W. *Sapiens Revista Universitaria de Investigación.* Año 6, n.1 junio de 2005: 47-59. [Consulta: 12 de julio de 2008] http://www.cdc.fonacit.gov.ve

CLAVES DE LA MATEMÁTICA

Se diagramó y compuso en la editorial de la uner.

república argentina

diciembre

2011

